Claudio De Angelis

Teoria

degli

Insiemi

QUADERNO n. 2

Analitic@Mente

Collana di Analisi Matematica

www.csmedea.it

Claudio De Angelis

Teoria

degli

Insiemi

QUADERNO n. 2

Analitic@Mente

Collana di Analisi Matematica

www.csmedea.it

Collana di Analisi Matematica: Analitic@Mente (a cura del Centro Studi Medea)
Quaderno: n. 2
Titolo: Teoria degli Insiemi
Versione: 2.0 del 24 Novembre 2012
Autore: Claudio De Angelis
Correttore: Maria Laura Medugno

Per commenti e/o suggerimenti scrivi a

info@csmedea.it oppure a Centro Studi Medea
Via G. Citarella, 24
84014 Nocera Inferiore (SA)
Italia

N. B. *Accanto alle formule non si è potuto tenere un corretto uso della spaziatura in relazione alla punteggiatura.*

π

Ave, o Roma o Madre gagliarda di latine virtù che tanto

3 , 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5

luminoso splendore prodiga spargesti con la tua saggezza[1].

8 9 7 9 3 2 3 8

1 L’enumerazione delle lettere di ogni lemma della frase fornisce le prime 19 cifre di π .

INDICE

Prefazione

Dopo la pubblicazione del primo testo "Fondamenti di Logica" appartenente alla collana ***Analitic@Mente****, anche questo secondo libro è pubblicato con una licenza CC (Creative Commons) per il diritto d'autore.*

Scopo di questo secondo quaderno, dal titolo esplicativo "Teoria degli Insiemi", è l'introduzione di elementi essenziali di tale teoria. Questa branca riveste un ruolo fondamentale nella matematica, dal momento che essa ha come obiettivo una veste fondazionale: formalizzare su di sé la matematica stessa nella sua interezza.

Nella prima parte del testo si introduce la cosiddetta "teoria intuitiva o ingenua" degli insiemi, assumendo come validi intuitivamente tutti i principi che sono esposti e che sembrano essere coerenti con la consueta matematica operativa.

Questa introduzione elementare è utile per familiarizzare con alcuni aspetti fondamentali, che sono poi ripresi e sviluppati con maggiore rigore in quella che è definita "teoria assiomatica" degli insiemi. Tra le varie teorie elaborate, nella seconda parte del testo, si accenna a quella ZFC di Zermelo-Fraenkel con Assioma di Scelta, definendola sulla base di dieci assiomi.

Con la consapevolezza che la conoscenza è rivolta a coloro che ne sono *affascinati, con la certezza che un'opera d'ingegno è una naturale proprietà della collettività e con l'impegno di continuare a scrivere per TUTTI, auguro una buona lettura.*

Nocera Inferiore, Claudio
20 Dicembre 2011 De Angelis
(Vers. 2.0, 24 Novembre 2012).

Quaderno **2**

Teoria degli Insiemi

2.1 CONCETTO DI INSIEME

Il termine *insieme* esprime un concetto primitivo, innato, ben chiaro nella mente dell'uomo. Nel linguaggio comune tale termine si adopera spesso, ma una sua definizione, elementare e soddisfacente, non è mai stata enunciata. Ogni qualvolta si tenta di definire un insieme si giunge sempre ad usare un suo sinonimo (collezione, raggruppamento, famiglia, aggregato, classe), invalidando la stessa definizione. La più nota definizione di insieme risale a *Georg F. L. P. Cantor*:

per insieme si intende un raggruppamento, concepito come un tutto, di oggetti ben distinti della nostra intuizione o del nostro pensiero.

Tale definizione, in quanto tautologica, non può essere utilizzata, ma è bene analizzarla per meglio comprendere il significato del termine *insieme*.

Cantor introduce l'insieme come *un raggruppamento concepito come un tutto*. Con questa affermazione, egli evidenzia la totalità dell'insieme, l'appartenenza dei suoi oggetti ad un'unica *classe*, ad una classe intesa come un tutt'uno. Tale raggruppamento raccoglie *oggetti ben distinti della nostra intuizione o del nostro pensiero*. In questo modo, *Cantor* sottolinea la diversità degli oggetti di uno stesso insieme, l'inutilità di ripetere uno stesso oggetto all'interno di un medesimo insieme e, allo stesso tempo, introduce, in modo implicito, il concetto di *appartenenza*. Tali membri sono parte dell'intuizione, o meglio dell'intuizione sensibile (ossia della realtà che è possibile avvertire attraverso la percezione sensoriale) o del pensiero (dell'immaginazione, della fantasia).

Gli oggetti di un insieme sono detti *elementi* e la loro natura è assolutamente irrilevante. È possibile trovare all'interno di uno stesso insieme elementi con caratteristiche comuni o senza alcun nesso. Ciò che risulta essenziale è la possibilità di stabilire se un elemento appartiene o meno ad un insieme.

Deve, cioè, essere vera *una ed una sola* delle due seguenti possibilità:

- il dato oggetto è un elemento dell'insieme considerato;
- il dato oggetto non è un elemento dell'insieme considerato.

Infatti, un agglomerato di oggetti che non siano ben distinti non costituisce un insieme.

- **Esempio**

  Un "raggruppamento di bravi studenti" non forma un insieme, in quanto non è possibile stabilire con certezza oggettiva la bravura di uno studente e, quindi, la sua appartenenza a tale raggruppamento.

Assegnato un insieme A è, dunque, indispensabile poter stabilire con assoluta certezza l'appartenenza o la non appartenenza di un qualsiasi elemento x all'insieme A.

Si è soliti denotare un insieme con una lettera maiuscola:

$A, B, C, X, Y, Z, \ldots$

ed un elemento con una lettera minuscola:

$a, b, c, x, y, z, \ldots$

È possibile, pertanto, scrivere:

$$x \in A$$

per indicare che *l'elemento* x *appartiene all'insieme* A, e

$$x \notin A$$

per indicare che *l'elemento* x *non appartiene all'insieme* A.

- **Nota**

  I simboli di appartenenza $\in$ e di non appartenenza $\notin$ vanno utilizzati esclusivamente tra un elemento ed un insieme $(x \in A)$. É possibile usare questi simboli tra due insiemi $(X \in A)$ solo in un caso particolare: se A è un insieme di insiemi e X è un insieme-elemento di A.

  Il simbolo di non appartenenza rappresenta la negazione dell'appartenenza, cioè l'espressione $x \notin A \equiv \neg(x \in A)$.

2.2 RAPPRESENTAZIONI DI UN INSIEME

Un modo semplice per descrivere un insieme è quello di elencare una ed una sola volta i suoi elementi tra parentesi graffe, quando è possibile. Una siffatta descrizione presuppone l'implicita conoscenza dell'elenco di tutti gli elementi dell'insieme stesso e l'effettiva possibilità di realizzarne una elencazione scritta. Tale descrizione è detta *rappresentazione tabulare* o *estensiva* o *per elencazione*.

- **Esempi**

  $A=\{1,2,3,4,5\}$; $B=\{a,b,c,d\}$;

  $C=\{giallo, rosso, rosa, verde, marrone\}$.

- **Approfondimento**

  È importante notare che gli elementi di un insieme, in una rappresentazione per elencazione, possono essere disposti senza un ordine prestabilito, con una successione del tutto arbitraria. In altri termini, un insieme è *non ordinato*, nel senso che i suoi elementi possono essere posizionati in più modi all'interno di una sua rappresentazione per elencazione senza alterare l'insieme stesso.

  Per esempio:

  $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $\{5, 7, 1, 3, 9\}$ sono due rappresentazioni per elencazione di uno stesso insieme. Ciò permette di affermare che esistono $n!$ (n fattoriale) modi, tra loro equivalenti, per esprimere un insieme, costituito da *n* elementi, con rappresentazione estensiva, pari al numero di permutazioni semplici che si possono ottenere dai suoi elementi.

  Si ricordi, inoltre, che se in un insieme con rappresentazione estensiva un elemento è ripetuto k volte, esso può essere cancellato $k-1$ volte, lasciandone uno solo come rappresentante.

  Ad es. $A=\{a, a, a, b, b, c\}=\{a, b, c\}$.

Talvolta, tuttavia, la rappresentazione per elencazione risulta non realizzabile, ad es. in presenza di infiniti elementi. Nasce, pertanto, l'esigenza di introdurre una diversa rappresentazione, alternativa all'elencazione degli elementi.

Tale rappresentazione alternativa, utilizzata per la descrizione di un insieme, è l'espressione di una o più proprietà caratteristiche (se esistenti) dei suoi elementi. In tal caso, si parla di *rappresentazione intensiva* o *per caratteristica*.

- **Esempio**

  Sia $A=\{1,3,5,7,9\}$ un insieme espresso in rappresentazione tabulare, una sua rappresentazione caratteristica è la seguente:

  $A=\{n\in N : n\, dispari\, , n<10\}$

  (si legge: *n appartenente all'insieme dei numeri naturali N tale che n sia dispari e minore di 10*).

- **Nota**

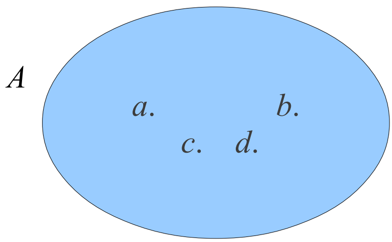
  Si è appena introdotto l'*insieme dei numeri naturali*, di cui si parlerà ampiamente in seguito. In questo punto della trattazione ci si limita ad introdurre solo la sua simbologia ed il suo significato elementare. Esso è denotato con N oppure con $\mathbb{N}$ e rappresenta l'insieme di tutti i numeri che sono necessari per l'enumerazione.

Si noti che esistono infinite rappresentazioni intensive di uno stesso insieme e che l'utilizzo di tali rappresentazioni è molto utile, a volte indispensabile, se il numero di elementi di un insieme è elevato o addirittura infinito.

Spesso, risulta utile rappresentare un insieme graficamente, mediante una linea chiusa del piano, all'interno della quale si trovano gli elementi dell'insieme stesso, rappresentati da punti geometrici e disposti in modo arbitrario. Questa rappresentazione prende il nome di *diagramma di Eulero-Venn*.

- **Esempio**

  $A=\{a, b, c, d\}$.



2.3 INSIEME FINITO ED INSIEME INFINITO

Sia X un insieme. Si dice che X è un *insieme finito* se esiste un numero naturale n tale che X contenga proprio n elementi (cioè un numero finito di elementi). Se, invece, comunque si scelga un numero naturale n, l'insieme X contiene almeno $n+1$ elementi, allora si dice che X è un *insieme infinito*. Più precisamente, si sceglie un numero naturale grande ad arbitrio, per es. $n=1\,000\,000$ e l'insieme X contiene almeno $1\,000\,001$ elementi, si sceglie poi $n=1\,000\,001$ e l'insieme X contiene almeno $1\,000\,002$ elementi. Iterando indefinitamente questo processo di scelta, si giunge ad affermare che X contiene infiniti elementi.

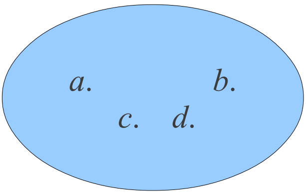
- **Esempi**

  1) L'insieme delle vocali è un insieme finito, in quanto contiene 5 elementi (e 5 è un numero finito, naturale).

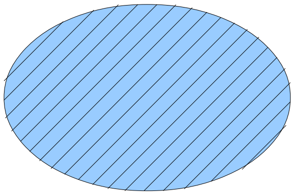
  2) L'insieme dei punti di una retta è un insieme infinito.

  3) L'insieme dei punti di un cerchio è un insieme infinito.

Graficamente:



Insieme finito



Insieme infinito

2.4 ORDINE O CARDINALITÀ O POTENZA DI UN INSIEME

Si dice *ordine* o *cardinalità* o *potenza* di un insieme il numero n di elementi che costituiscono l'insieme stesso, se finito.

Si noti che la cardinalità di un insieme può essere sia finita che infinita, ma in quest'ultimo caso non rappresenta il numero di elementi dell'insieme.

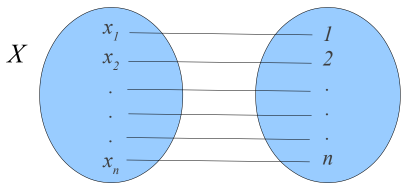
Dato un insieme X , la cardinalità si può denotare con $card(X)$ oppure con $|X|$.

- **Approfondimento**

  Dati due insiemi X e Y (non privi di elementi), se esiste una corrispondenza biunivoca f che li relazioni (cioè se ad ogni elemento di X è possibile associare uno ed un solo elemento di Y e viceversa), essi si dicono *insiemi idempotenti* o *equipotenti* o *equicardinali*.

  Si consideri l'insieme X e l'insieme $\{1,2,3,\dots,n\}$, con n numero naturale. Se X è equipotente a $\{1,2,3,\dots,n\}$, allora X è un *insieme finito* e $card(X)=n$.

  Graficamente:



  Se X contiene almeno un elemento e non esiste alcuna corrispondenza biunivoca f che ponga in relazione X con $\{1,2,3,\dots,n\}$, allora X è un *insieme infinito*.

In particolare, è possibile fornire la seguente definizione.

Definizione di insieme numerabile. Si dice *insieme numerabile* un insieme infinito X equipotente ad $\mathbb{N}$ (insieme dei numeri naturali). In questo caso la cardinalità di X si indica con $\aleph_0$ (*aleph zero*), che è lo stesso ordine dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali.
In simboli:

$$X \text{ è } numerabile \Leftrightarrow card(X) = card(\mathbb{N}) = \aleph_0 .$$

É opportuno sottolineare che non esiste alcun insieme infinito con una cardinalità minore di $\aleph_0$, in altri termini $\aleph_0$ è il più piccolo ordine di un insieme infinito.

2.5 INSIEME VUOTO, UNITARIO, NULLO ED UNIVERSO

Un *insieme vuoto* è un insieme privo di elementi. Tale concetto è, però, decisamente contrastante con il concetto di insieme stesso. Infatti, un insieme, essendo concepito come un raggruppamento di oggetti, non può non averne. Ma, come capita spesso, è necessario estendere il concetto di insieme anche a questo caso limite. Pertanto, si dirà che un insieme è vuoto se la sua cardinalità è nulla e lo si denoterà con $\{\}$ oppure con $\emptyset$.

In simboli: $card(\emptyset)=0$.

Si dice *insieme unitario* o *singleton* o *singoletto* un insieme *X* che è costituito da un solo elemento, cioè con cardinalità unitaria.

In simboli: $card(X)=1$.

Un particolare insieme unitario *X* è l'*insieme nullo*, cioè l'insieme costituito dall'unico elemento zero. In simboli: $\{0\}$.

Si noti che la cardinalità di tale insieme è unitaria.

In simboli: $card(\{0\})=1$.

In alcuni casi è necessario definire un insieme che contenga ogni altro insieme contestuale e, di conseguenza, tutti gli elementi considerati.

Un siffatto insieme è definito *universo* e denotato con U .

- **Nota**

  É evidente che l'insieme universo non è assoluto, ma risulta relativo al contesto considerato. Si consideri un esempio per chiarire il concetto. Si supponga di introdurre in una trattazione esclusivamente numeri naturali, allora l'universo può essere N (insieme dei numeri naturali), ma se è necessario introdurre anche numeri razionali allora l'universo N non è più adatto, perché insufficiente e bisogna ricorrere ad un universo più ampio, ad es. Q (insieme dei numeri razionali).

Un insieme universo U di solito è rappresentato graficamente mediante un rettangolo.

U

2.6 SOTTOINSIEMI O PARTI

Si considerino due insiemi A e B, si dice che A è *parte* o *sottoinsieme* di B (oppure che A è *incluso* o *contenuto* in B o ancora che B *contiene* o *include* A) se ogni elemento dell'insieme A è anche elemento dell'insieme B.

In simboli: $A \subseteq B$ o $B \supseteq A \Leftrightarrow (\forall\, x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Proprietà:

1. $A \subseteq A$, qualunque sia A *(proprietà riflessiva)*;
2. $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Rightarrow (A = B)$ *(proprietà antisimmetrica)*;
3. $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$ *(proprietà transitiva)*.

- **Approfondimento**

  È utile ricordare che le suddette proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva definiscono una relazione d'ordine (largo) tra gli insiemi.

2.6.1 SOTTOINSIEMI PROPRI O PARTI PROPRIE

Si considerino due insiemi distinti A e B, si dice che A è *parte propria* o *sottoinsieme proprio* di B (oppure che A è *incluso strettamente* o *contenuto strettamente* in B o ancora che B *contiene strettamente* o *include strettamente* A) se ogni elemento dell'insieme A è anche elemento dell'insieme B e B contiene almeno un elemento che non appartiene ad A.

In simboli: $A \subset B \text{ o } B \supset A \Leftrightarrow (\forall\, x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\exists\, x \in B : x \notin A)$.

Proprietà:

1. $A \not\subset A$, qualunque sia A *(proprietà antiriflessiva)*;
2. $(A \subset B) \Rightarrow (B \not\subset A)$ *(proprietà asimmetrica)*;
3. $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$ *(proprietà transitiva)*.

- **Approfondimento**

  È utile ricordare che le suddette proprietà antiriflessiva, asimmetrica e transitiva definiscono una relazione d'ordine stretto tra gli insiemi.

- **Nota 1**

  Il simbolo di inclusione $\subseteq$ comprende anche l'uguaglianza, cosicché $A \subseteq B$ ammette anche la possibilità $A = B$, infatti:

$$(A \subseteq B) \equiv (A \subset B)\ xor\ (A = B) \ .$$

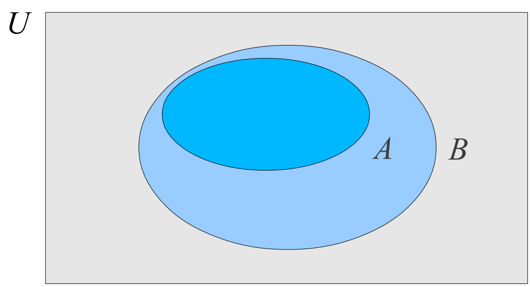
- **Nota 2**

  Dato un insieme A, tra i sottoinsiemi di A figurano anche il vuoto $\emptyset$ e A stesso. Tali parti di A sono dette *sottoinsiemi impropri* di A. Dunque, l'insieme vuoto è sottoinsieme di ogni insieme A, il quale, a sua volta, è sottoinsieme dell'insieme universo U. Pertanto, si ha sempre: $\emptyset \subseteq A \subseteq U$, qualunque sia l'insieme A.

2.6.2 RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DI UNA PARTE

Si considerino due insiemi A e B nell'universo U, tali che $A \subseteq B$.

Una rappresentazione grafica è la seguente:



2.7 USO DEI SIMBOLI

Uso corretto	**Uso errato**	
$a \in A$	$\{a\} \in A$	$\in$ si usa solo tra un elemento e un insieme e non tra due insiemi, a meno che A non sia un insieme di insiemi.
$a \notin A$	$\{a\} \notin A$	$\notin$ si usa solo tra un elemento e un insieme e non tra due insiemi, a meno che A non sia un insieme di insiemi.
$\{a\} \subseteq A$	$a \subseteq A$	$\subseteq$ si usa solo tra due insiemi.
$\{a\} \nsubseteq A$	$a \nsubseteq A$	$\nsubseteq$ si usa solo tra due insiemi.
$\{a\} \subset A$	$a \subset A$	$\subset$ si usa solo tra due insiemi.
$\{a\} \not\subset A$	$a \not\subset A$	$\not\subset$ si usa solo tra due insiemi.
$\{a\} = A$	$a = A$	$=$ non si usa tra un elemento e un insieme.
$\{a\} \neq A$	$a \neq A$	$\neq$ non si usa tra un elemento e un insieme.

2.8 CLASSE O FAMIGLIA O INSIEME DI INSIEMI

Un insieme costituito da elementi che sono a loro volta insiemi è detto *classe* o *famiglia* o *insieme di insiemi*.

- **Esempio**

  $C=\{\{a,b\},\{a\},\{b,c\},\{b\}\}$.

  Si noti che gli elementi di C sono degli insiemi, ma per essi è lecito l'utilizzo del simbolo di appartenenza, per es. $\{a\}\in C$, $\{c\}\notin C$. È necessario, ora, digredire verso il concetto di *vuoto*, evidenziando una sua particolarità: l'insieme vuoto, in quanto parte di ogni insieme, è incluso in C (in simboli: $\emptyset\subseteq C$), ma in quanto elemento non appartiene a C (in simboli: $\emptyset\notin C$), perché non è presente tra i suoi elementi. Affinché una classe abbia come elemento l'insieme vuoto è necessario che esso sia esplicitamente elencato tra i suoi elementi.

  Per es. $C=\{\{a\},\{b\},\emptyset\}$ è una classe costituita da tre elementi: l'insieme $\{a\}$, l'insieme $\{b\}$ e l'insieme vuoto $\emptyset$. In tal caso è possibile affermare che $\emptyset\in C$. Ma non bisogna dimenticare che, in ogni caso, si ha anche: $\emptyset\subseteq C$.

2.9 POTENZA O INSIEME DELLE PARTI

Sia A un insieme qualunque, non vuoto.

Si dice *potenza* o *insieme delle parti* di A la classe costituita da tutte le possibili parti di A , proprie e improprie. Si denota con $P(A)$.

- **Esempio**

Sia $A=\{a,b,c\}$, allora

$P(A)=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\emptyset,A\}$.

Si noti che tra i sottoinsiemi di A vi sono anche quelli impropri, cioè A e $\emptyset$.

- **Approfondimento**

Teorema ***(La cardinalità della potenza)***

Sia A *un insieme finito e non vuoto.*

Se $card(A)=n$ *allora* $card(P(A))=2^n$ *,* $\forall n\in N$.

Dim.

Per la dimostrazione di questo teorema si utilizzerà il principio di induzione. Come base dell'induzione si prenda $n=1$. Banalmente si verifica che se A è costituito da un unico elemento, allora $P(A)$ sarà costituito solo dai suoi sottoinsiemi impropri, cioè A e $\emptyset$, pertanto $card(P(A))=2=2^1$ e la base dell'induzione risulta vera.

Per il passo induttivo si supponga vero che, fissato un $n\in N$, risulti $card(P(A))=2^n$ e si giunga a dimostrare che se $card(A)=n+1$ allora $card(P(A))=2^{n+1}$. Infatti, se $card(A)=n+1$ allora esiste almeno un elemento a appartenente all'insieme A . Un qualunque sottoinsieme di A può contenere o meno l'elemento a . Tutti i sottoinsiemi di A che non contengono

a possono essere considerati sottoinsiemi di $A \setminus \{a\}$ (l'insieme *A* privato dell'elemento *a*), la cui cardinalità è $card\left(A \setminus \{a\}\right) = n$ e per l'ipotesi induttiva accettata come vera si avrà $card\left(P\left(A \setminus \{a\}\right)\right) = 2^n$. Andando, ora, a considerare tutti gli altri sottoinsiemi di A che contengono a, si ricava che ce ne sono esattamente 2^n, tanti quanti sono i sottoinsiemi di $A \setminus \{a\}$, infatti i sottoinsiemi che contengono a sono sottoinsiemi del tipo $X \cup \{a\}$, dove X è il generico sottoinsieme di $A \setminus \{a\}$. Riassumendo: i sottoinsiemi di A sono in numero di $2^n + 2^n = 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$, pertanto $card\left(P\left(A\right)\right) = 2^{n+1}$ e il teorema è dimostrato.

■ ■ ■

2.10 UGUAGLIANZA TRA INSIEMI

Si considerino due insiemi A e B. Si dice che A e B sono *uguali* se contengono gli stessi elementi. In altri termini, dire che $A = B$ equivale a dire che gli elementi di A sono anche elementi di B e viceversa.

In simboli: $\left(A = B\right) \Leftrightarrow \left(x \in A \Leftrightarrow x \in B\right)$.

Per verificare che due insiemi A e B siano uguali occorre verificare la proprietà antisimmetrica dell'inclusione, cioè:
$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Rightarrow (A = B)$.

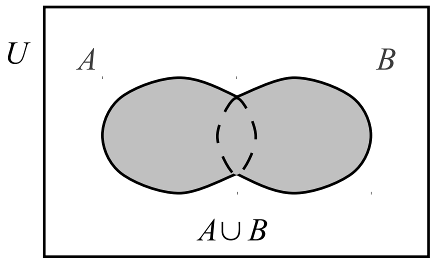
2.11 OPERAZIONI TRA INSIEMI

Unione.

Dati due insiemi A e B, si dice *unione* tra A e B un terzo insieme costituito dagli elementi che appartengono ad A o a B, cioè ad almeno uno dei due.

In simboli: $A \cup B = \{x \in U : (x \in A) \vee (x \in B)\}$.

Graficamente:



Analogamente, dati n insiemi $A_1, A_2, \ldots, A_n$, con $n \in N$, si dice *unione* tra gli n insiemi considerati l'insieme costituito dagli

elementi che appartengono almeno ad uno tra gli n insiemi.
In simboli:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \left\{ x \in U : (x \in A_1) \vee (x \in A_2) \vee \ldots \vee (x \in A_n) \right\}.$$

L'unione di n insiemi, in simboli, può essere sintetizzata come segue:

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

(si legge*: unione con k variabile da 1 a n degli insiemi A con k*).

La definizione di unione può essere anche estesa ad infiniti insiemi.
Considerato un insieme infinito I, fissato un elemento generico k appartenente ad I, sia assegnato l'insieme A_k.
L'unione degli infiniti insiemi A_k si denoterà con:

$$\bigcup_{k \in I} A_k$$

(si legge*: unione con k appartenente a I degli insiemi A con k*).

- **Esempi**

1) Siano $A=\{2, 3, 4, 5\}$ e $B=\{2, 3, 8, 9, 10\}$,

si ha $A\cup B=\{2, 3, 4, 5, 8, 9, 10\}$.

2) Siano $A_1=\{0, 1, 2, 3\}$, $A_2=\{1, 2, 3, 4\}$,

$A_3=\{2, 3, 4, 5\}$, $A_4=\{3, 4, 5, 6\}$, $A_5=\{4, 5, 6, 7\}$,

si ha

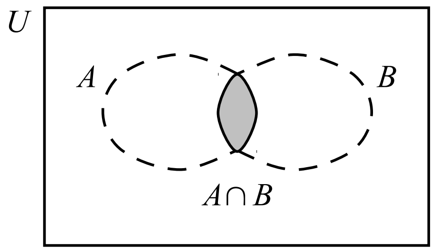
$$\bigcup_{k=1}^{5} A_k=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Intersezione.

Dati due insiemi A e B, si dice *intersezione* tra A e B un terzo insieme costituito dagli elementi comuni ad A e B.

In simboli: $A\cap B=\{x\in U : (x\in A)\wedge(x\in B)\}$.

Graficamente:



Analogamente, dati n insiemi $A_1, A_2, ..., A_n$, con $n \in N$, si dice *intersezione* tra gli n insiemi considerati l'insieme costituito dagli elementi comuni a tutti gli n insiemi.

In simboli:

$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \{x \in U : (x \in A_1) \wedge (x \in A_2) \wedge ... \wedge (x \in A_n)\}.$$

L'intersezione di n insiemi, in simboli, può essere sintetizzata come segue:

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

(si legge*: intersezione con k variabile da 1 a n degli insiemi A con k*).

La definizione di intersezione può essere anche estesa ad infiniti insiemi.

Considerato un insieme infinito I, fissato un elemento generico k appartenente ad I, sia assegnato l'insieme A_k.

L'intersezione degli infiniti insiemi A_k si denoterà con:

$$\bigcap_{k \in I} A_k$$

(si legge*: intersezione con k appartenente a I degli insiemi A con k*).

- **Nota**

  Due insiemi A e B si dicono *disgiunti* se la loro intersezione è vuota, cioè se $A \cap B = \emptyset$.

  G e n e r a l i z z a n d o: n insiemi $A_1, A_2, \ldots, A_n$, con $n \in N$, si dicono *disgiunti* se:

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = \emptyset \ .$$

- **Esempi**

  1) Siano $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{a, c, e, g, h\}$, si ha $A \cap B = \{a, c, e\}$.

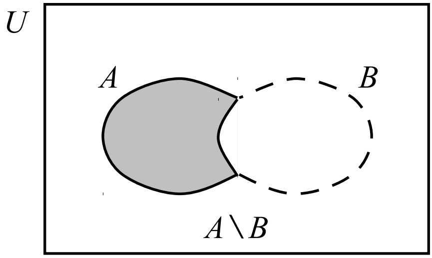
  2) Siano $A_1 = \{0, 2, 4, 6\}$, $A_2 = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $A_3 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ e $A_4 = \{-2, 2, -4, 4, -6, 6\}$, si ha $\bigcap_{k=1}^{4} A_k = \{4, 6\}$.

Differenza.

Dati due insiemi A e B , si dice *differenza* di A e B o *complemento* di B rispetto ad A l'insieme costituito dagli elementi che appartengono ad A , ma che non appartengono a B .

In simboli: $A \setminus B = \{x \in U : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$.

Graficamente:



- **Nota 1**

  Non è necessario che $B \subseteq A$ o che B abbia un'intersezione con A per poter avere $A \setminus B$, infatti dalla definizione data si evince la seguente uguaglianza: $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$, pertanto nel caso A e B siano disgiunti, cioè: $A \cap B = \emptyset$ allora:
  $A \setminus B = A$.

- **Nota 2**

  La differenza tra insiemi non è un'operazione commutativa, cioè $A \setminus B \neq B \setminus A$, infatti $B \setminus A = \{x \in U : (x \in B) \wedge (x \notin A)\}$.

- **Esempio**

  Siano $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ e $B=\{2,4,6,8,10\}$.

  $A\setminus B=\{1,3,5,7\}$, $B\setminus A=\{8,10\}$.

Complementare.

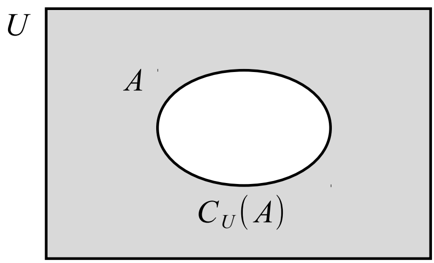
Dato un insieme A , si dice *complementare* di A l'insieme costituito dagli elementi dell'universo U che non appartengono ad A .

In simboli:

$$C_U(A)=\{x\in U : x\notin A\}\ .$$

Per la definizione data di complementare di A si ha la seguente uguaglianza: $C_U(A)=U\setminus A$.

Graficamente:



- **Nota**

  Il complementare di un insieme A può essere denotato anche nei seguenti modi: $\neg A$ oppure $\overline{A}$ oppure A^c .

- **Esempio**

  Sia $U = \mathbb{N}$ e sia $P = \{n \in \mathbb{N} : \ n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$ (insieme dei numeri naturali pari).

  Si ha $P^c = D = \{n \in \mathbb{N} : n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}\}$ (insieme dei numeri naturali dispari). Si noti che l'unione di P e di P^c restituisce l'universo U , nell'esempio suddetto: $P \cup D = \mathbb{N}$.

Differenza simmetrica.

Dati due insiemi A e B , si dice *differenza simmetrica* di A e B l'insieme costituito dagli elementi che appartengono ad A , ma che non appartengono a B o che appartengono a B , ma che non appartengono ad A .

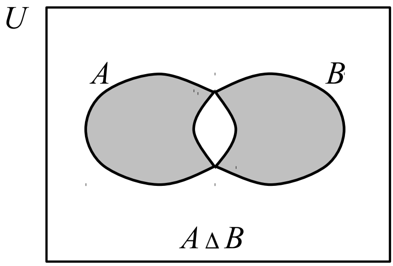
In simboli:

$$A \Delta B = \{x \in U : \ ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \in B) \wedge (x \notin A))\}$$

(si legge: *A delta B*)

In altri termini, $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, o ciò che è lo stesso $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Graficamente:



2.11.1 PROPRIETÀ DELLE OPERAZIONI TRA INSIEMI

1) *Proprietà dell'idempotenza:*

   $A \cup A = A$; $A \cap A = A$.

2) *Proprietà dell'identità:*

   $A \cup U = U$; $A \cup \emptyset = A$;

   $A \cap U = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$.

3) *Proprietà commutative:*

   $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$; $A \Delta B = B \Delta A$.

4) *Proprietà associative:*

   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

5) *Proprietà distributive:*

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

6) *Proprietà dell'assorbimento:*

$A \cup (B \cap A) = A$; $A \cap (B \cup A) = A$.

7) *Proprietà della differenza:*

$A \setminus A = \emptyset$; $A \setminus \emptyset = A$; $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

8) *Proprietà della complementarietà:*

$A^c \cup A = U$; $A^c \cap A = \emptyset$;

$U^c = \emptyset$; $\emptyset^c = U$;

$(A^c)^c = A$.

9) *Proprietà della differenza simmetrica:*

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;

$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

10) *Leggi di De Morgan:*

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ oppure $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$;

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ oppure $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$.

Le suddette proprietà possono essere verificate da un punto di vista grafico mediante i diagrammi di Eulero-Venn e da un punto di vista analitico mediante la proprietà antisimmetrica dell'inclusione.

2.12 RICOPRIMENTI E PARTIZIONI

Si considerino un insieme finito X e l'insieme delle sue parti $P(X)$.

Sia $\Re \subseteq P(X)$ una famiglia di k sottoinsiemi di X, del tipo $\Re = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$, con $k \in \mathbb{N}$.

Indicato con X_i il generico sottoinsieme di X, contenuto nella famiglia $\Re$, si dice che $\Re$ è un *ricoprimento* di X se e solo se accade che l'unione di tutti i sottoinsiemi X_i di X contenuti in $\Re$ sia proprio uguale ad X.

In simboli:

$$\bigcup_{i=1}^{k} X_i = X \text{ , con } X_i \in \Re \subseteq P(X) \Leftrightarrow \Re \text{ è un ricoprimento di } X.$$

- **Esempio**

  Sia $X = \{a, b, c\}$, l'insieme delle parti di X è:

$P(X)=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\emptyset,X\}$,

sia $\Re=\{\{b\},\{a,b\},\{b,c\}\}$.

Si ha $\{b\}\cup\{a,b\}\cup\{b,c\}=\{a,b,c\}=X$, quindi $\Re$ è un ricoprimento di X.

Si considerino un insieme finito X e l'insieme delle sue parti $P(X)$.

Sia $\prod\subseteq P(X)$ una famiglia di k sottoinsiemi di X, del tipo $\prod=\{X_1,X_2,\ldots,X_k\}$, con $k\in\mathbb{N}$.

Indicato con X_i il generico sottoinsieme di X, contenuto nella famiglia $\prod$, si dice che $\prod$ è una *partizione* di X se e solo se sono verificate le seguenti tre *proprietà*:

1) $X_i\neq\emptyset,\ \forall i\in\{1,2,\ldots,k\}$;
2) $X_i\cap X_j=\emptyset,\ \forall i,j\in\{1,2,\ldots,k\}$ con $i\neq j$;
3) $\bigcup_{i=1}^{k} X_i=X$, con $X_i\in\prod\subseteq P(X)$.

Ciò significa che $\prod$ è una partizione di X se e solo se è un ricoprimento di X (prop. 3) e tutti i suoi elementi sono non vuoti (prop. 1) e a due a due disgiunti (prop. 2).

Si noti esplicitamente che la proprietà 3 rende la partizione un particolare ricoprimento, pertanto se $\prod$ è una partizione di X, allora $\prod$ è anche un ricoprimento di X (ma non vale il viceversa).

- **Esempio**

  Sia $X=\{1,2,3,4\}$ e sia ad es. $\prod=\{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$.

  Si verifichi che $\prod$ è una partizione di X.

  Essendo ciascun elemento di $\prod$ non vuoto, allora vale la proprietà 1 delle partizioni. Inoltre, gli elementi di $\prod$ risultano a due a due disgiunti, infatti:

  $\{1\}\cap\{2,3\}=\emptyset$, $\{1\}\cap\{4\}=\emptyset$ e $\{2,3\}\cap\{4\}=\emptyset$, pertanto risulta valida la proprietà 2. Infine, considerando l'unione degli elementi di $\prod$, si ha $\{1\}\cup\{2,3\}\cup\{4\}=\{1,2,3,4\}=X$ e anche la proprietà 3 risulta verificata. Se ne conclude che $\prod$ è una partizione di X.

2.13 MULTISET O MULTINSIEME

Sia A un insieme finito di n elementi del tipo:

$A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$.

Si dice *multiset* o *multinsieme* di A e si denota con A_m ogni espressione generalizzata dell'insieme A, con molteplicità relativa a ciascun elemento. In altri termini, un multiset di A è un elenco non ordinato degli elementi di A, che si ottiene ripetendo ciascun elemento un certo numero di volte. Tale numero di ripetizioni prende il nome di *molteplicità relativa all'elemento i-esimo* a_i e si denota con $m(a_i)$.

È ovvio che esistono infiniti multiset di uno stesso insieme A, perché al variare della molteplicità di ciascun elemento varia il multiset.

Le diverse molteplicità degli elementi di un multiset possono essere racchiuse (senza considerarne le eventuali ripetizioni) in un insieme, che si dirà *insieme delle molteplicità*.

- **Esempio**

  Sia $A=\{a, b, c, d, e\}$.

  Si consideri un multiset di A : $A_m=\{a, a, a, b, b, c, d, d\}$,

  è possibile sottolineare le seguenti molteplicità relative: $m(a)=3$, $m(b)=2$, $m(c)=1$, $m(d)=2$, $m(e)=0$.

  $M(A_m)=\{0, 1, 2, 3\}$ si dirà *insieme delle molteplicità relative*.

- **Nota 1**

  Se l'insieme delle molteplicità risulta $M(A_m)=\{0, 1\}$, vuol dire che nel multiset non vi sono ripetizioni di elementi, di conseguenza il multiset si riduce ad un insieme. Più precisamente $A_m \subset A$, infatti ogni elemento di A è al più considerato una volta e, a causa della presenza dello zero in $M(A_m)$, ci sarà anche qualche elemento di A per nulla considerato.

Per esempio: $A=\{a, b, c\}$ e $M(A_m)=\{0, 1\}$.

Più precisamente si supponga che $m(a)=1$, $m(b)=1$, $m(c)=0$, allora si ha $A_m=\{a, b\}\subset A$.

Si noti, inoltre, che se $M(A_m)=\{1\}$ allora $A_m=A$.

- **Nota 2**

Sia A_m un multiset di un dato insieme $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ e sia $m(a_i)$ la molteplicità relativa al generico elemento i-esimo di A.

La somma di tutte le molteplicità relative agli elementi a_i fornisce la cardinalità del multiset. In simboli:

$$card(A_m)=m(a_1)+m(a_2)+\dots+m(a_n)=\sum_{i=1}^{n} m(a_i).$$

- **Approfondimento**

Dato un insieme A e considerato un suo multiset A_m, la molteplicità relativa a ciascun elemento di A, in effetti, rappresenta una funzione definita nell'insieme A e con valori nell'insieme dei numeri naturali, ampliato con lo zero.

In simboli: $m: \forall x\in A \rightarrow m(x)\in\mathbb{N}_0$ (*funzione molteplicità*).

Ciò detto, un multiset di A può essere definito come una semplice struttura costituita da un insieme sostegno A e da una funzione molteplicità m, in simboli: $A_m = (A, m)$.

2.14 COPPIE ED ENNUPLE ORDINATE

Con il termine *coppia* o più esplicitamente *coppia ordinata* si intende una collezione di due oggetti, tra i quali si distingue una prima *coordinata* (o *componente*) dalla seconda. Una coppia è denotata con parentesi uncinate o acute $\langle a_1, a_2 \rangle$ oppure, se il contesto non lascia spazio ad ambiguità, con parentesi tonde (a_1, a_2).

Una coppia ordinata si distingue da un insieme di due elementi per il fatto che in essa è essenziale l'ordine di posizione degli elementi, quindi $(a_1, a_2) \neq (a_2, a_1)$, invece per gli insiemi $\{a_1, a_2\} = \{a_2, a_1\}$. Di conseguenza due coppie ordinate risultano uguali se e solo se sono uguali le loro componenti omologhe.

In simboli: $(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \Leftrightarrow a_i = b_i$, con $i = 1, 2$.

È anche possibile definire una coppia ordinata come una classe di insiemi, più precisamente (*definizione di Kuratowski*):

$(a_1, a_2) = \{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\}$.

In tale definizione si evidenzia l'insieme di tutti gli elementi della coppia e l'insieme della prima componente, così da stabilire l'ordine di cui necessita la coppia.

G e n e r a l i z z a n d o:

Si dice *ennupla ordinata* o semplicemente *ennupla* un elenco costituito da n elementi $a_1, a_2, ..., a_n$, considerati secondo un preciso ordine di posizione.

Una $n-pla$ (ennupla) ordinata si denota allo stesso modo della coppia, con parentesi tonde $(a_1, a_2, ..., a_n)$ oppure con parentesi uncinate $\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$, dove:

$a_1 =$ *prima coordinata* o *componente*;

$a_2 =$ *seconda coordinata* o *componente*;

.

.

.

$a_n =$ *n-ma (ennesima) coordinata* o *componente*.

È ovvio che in una ennupla non è possibile scambiare l'ordine delle componenti, o meglio scambiando l'ordine delle componenti si costruiscono nuove ennuple diverse dalla precedente.

Se $n=1$ la ennupla (a_1) identificherà l'elemento stesso.

Se $n=2$ la ennupla (a_1, a_2) si riduce alla *coppia ordinata*.

Se $n=3$ la ennupla (a_1, a_2, a_3) si dirà *terna ordinata.*

La definizione di ennupla può essere introdotta in modo ricorsivo a partire dalla definizione di coppia ordinata, infatti una $n-pla$ può essere considerata come una coppia costituita dalla prima componente a_1 e dalla $(n-1)-pla$ $(a_2, \ldots, a_n)$. Iterando il procedimento di definizione, a ritroso, fino alla terna si giunge ad affermare che $(a_1, a_2, a_3) = (a_1, (a_2, a_3))$ e (a_2, a_3) può essere introdotta mediante la suddetta definizione di coppia di *Kazimierz Kuratowski*.

Si noti che esplicitare completamente la definizione di *Kuratowski* per una ennupla risulta alquanto laborioso, per averne un'idea si riporta la definizione per una terna:

$$(a_1, a_2, a_3) = (a_1, (a_2, a_3)) = \{\{a_1\}, \{a_1, (a_2, a_3)\}\} =$$
$$= \{\{a_1\}, \{a_1, \{\{a_2\}, \{a_2, a_3\}\}\}\} .$$

- **Nota**

  Gli elementi di una ennupla non devono necessariamente essere distinti, a differenza di quelli di un insieme, pertanto è possibile che qualche elemento si ripeta, ad esempio è possibile considerare la coppia $(a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$.

  Infine, si ricordi la condizione essenziale di uguaglianza tra due ennuple: *due ennuple sono uguali se e solo se sono uguali le loro componenti omologhe*. In simboli:

  $(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n) \Leftrightarrow a_i = b_i$, con $i = 1, 2, \ldots, n$.

2.15 PRODOTTO CARTESIANO TRA INSIEMI

Considerati due insiemi X e Y, si dice *prodotto cartesiano* di X per Y l'insieme i cui elementi sono le coppie ordinate del tipo (x, y), con $x \in X$ e $y \in Y$.

In simboli: $X \times Y = \{(x, y):\ (x \in X) \wedge (y \in Y)\}$.

Bisogna notare esplicitamente che se X e Y sono non vuoti e $X \neq Y$ allora $X \times Y \neq Y \times X$, cioè *non vale la proprietà commutativa* per il prodotto cartesiano tra insiemi. Tale caratteristica è dovuta all'ordinamento delle coppie e alla relazione $(x, y) \neq (y, x)$.

Vale, invece, la *proprietà distributiva del prodotto cartesiano rispetto all'unione*: $(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z)$.

Si ricordi, inoltre, che il prodotto cartesiano $X \times X$ si denota con il simbolo X^2 ed il suo sottoinsieme $D = \{(x, x):\ x \in X\}$ si dice *diagonale* di X^2. È ovvio che, per la definizione data, non può esistere il sottoinsieme diagonale di un cartesiano $X \times Y$ se $X \neq Y$.

- **Esempi**

  1) Siano $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b\}$ si ha

$A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$ e

$B\times A=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$; si noti la diversità dei due prodotti dovuta alla presenza di coppie ordinate.

2) Sia $A=\{1,2,3\}$ si ha

$A^2=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$;

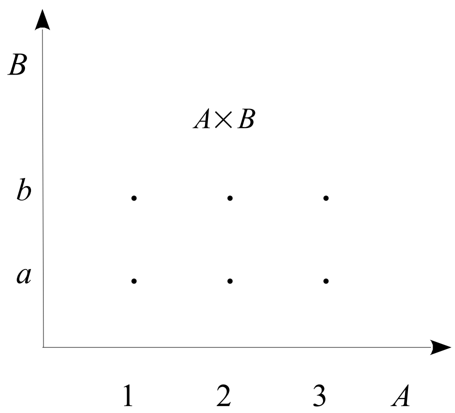
$D=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$.

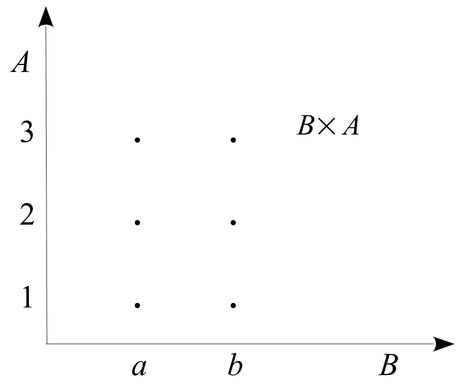
- **Approfondimento**

Se il lettore ha familiarità con i sistemi di riferimento è possibile osservare dal punto di vista grafico un prodotto cartesiano tra insiemi.

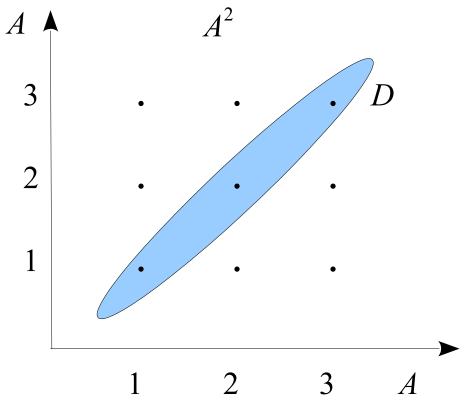
Siano $A=\{1,2,3\}$ e $B=\{a,b\}$,

graficamente si ha





Sia $A=\{1,2,3\}$, le rappresentazioni cartesiane di A^2 e dell'insieme diagonale D sono le seguenti:



G e n e r a l i z z a n d o:

Dati n insiemi $A_1, A_2, \ldots, A_n$, si dice *prodotto cartesiano* degli n insiemi considerati l'insieme i cui elementi sono le ennuple $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, con $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ..., $a_n \in A_n$.

In simboli:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\} .$$

- **Nota 1**

  Se uno o più insiemi che partecipano al prodotto cartesiano sono vuoti tutto il prodotto cartesiano per convenzione risulta vuoto.

  Per esempio: se $A_2 = \emptyset \Rightarrow A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \emptyset$.

- **Nota 2**

  Se $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ allora $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = A^n$.

  Inoltre, nel caso particolare di $n = 1$ allora $A^1 = A$.

2.16 INSIEMI NUMERICI

In questo paragrafo si cercherà di delineare il percorso che ha condotto l'uomo-matematico verso l'utilizzo dei numeri reali. Per tale percorso sarà indispensabile una conoscenza di base delle *quattro operazioni*, ossia *addizione*, *sottrazione*, *moltiplicazione* e *divisione*. La conoscenza propedeutica di queste operazioni sarà richiesta limitatamente ad un uso meccanico–pratico e non di certo teorico (dal momento che una conoscenza teorica delle operazioni citate prevede la nozione di *funzione* non ancora trattata).

2.16.1 CENNI SUI NUMERI INTERI E RAZIONALI

L'uomo, sin dai primordi, ha sentito la necessità di enumerare, quando possibile, gli oggetti che lo circondano. Proprio l'enumerazione è il motivo fondamentale per il quale sono stati introdotti i *numeri naturali*: $1, 2, 3, 4, 5, ...$

L'*insieme dei numeri naturali* è denotato con N oppure con $\mathbb{N}$, in simboli:

$$\mathbb{N}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\} .$$

In tale insieme le operazioni di addizione e di moltiplicazione hanno sempre significato, ossia queste operazioni sono sempre eseguibili, indipendentemente dai numeri componenti, infatti:

$a+b=s\in\mathbb{N}$ e $a\cdot b=p\in\mathbb{N}$, $\forall\, a, b\in\mathbb{N}$.

Al contrario, le operazioni di sottrazione e di divisione non sono sempre eseguibili in $\mathbb{N}$, infatti, è sufficiente osservare che:

$\forall\, a, b \in \mathbb{N}$, $a - b = d \in \mathbb{N}$ solo se $a > b$ (*a* maggiore di *b*);

$\forall\, a, b \in \mathbb{N}$, $a : b = q \in \mathbb{N}$ solo se a è multiplo di b.

Nasce, quindi, per ampliare il campo di applicabilità della sottrazione l'esigenza di introdurre lo zero, con la conseguente formazione dell'insieme:

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\},$$

nel quale si ha

$\forall\, a, b \in \mathbb{N}_0$, $a - b = d \in \mathbb{N}_0$ solo se $a \geqslant b$ (*a* maggiore o uguale a *b*).

- **Nota 1**

  È bene ricordare che in alcuni testi la simbologia $\mathbb{N}_0$ indica l'insieme dei numeri naturali *escluso* lo zero, in quanto $\mathbb{N}$ è considerato a partire dallo zero incluso. Si è scelto, invece, di adottare la simbologia inversa, che meglio si accorda con la lettura del simbolo $\mathbb{N}_0$ e cioè "N *con* zero".

Affinché la sottrazione possa avere un campo di applicabilità ancora più ampio è necessario giungere all'*insieme dei numeri interi relativi*:

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots\},$$

nel quale la sottrazione è sempre eseguibile, cioè:

$a-b=d\in\mathbb{Z}$, $\forall\, a,b\in\mathbb{Z}$.

- **Nota 2**

  È utile immaginare i numeri interi relativi disposti su una retta orientata da sinistra verso destra (o anche dal basso verso l'alto), in modo da disporre i numeri in senso crescente, come segue:

  ... -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 ...

  Tale rappresentazione facilita le operazioni di differenza tra due numeri negativi o tra un positivo e un negativo, in quanto la differenza mostra la distanza relativa tra i due numeri considerati.

Ora è giunto il momento di ampliare il campo di validità della divisione, introducendo quelli che sono chiamati *numeri razionali*. L'*insieme dei numeri razionali* è denotato con $\mathbb{Q}$ e rappresenta le frazioni tra numeri interi relativi con il denominatore, rigorosamente diverso da zero, in simboli:

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}:\ m\in\mathbb{Z}\,,\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\},$$

dove m e n sono detti rispettivamente *numeratore* e *denominatore* della frazione.

- **Nota 3**

  È bene precisare, nonostante possa sembrare superfluo, che nella matematica elementare la divisione per zero non è definita. Più precisamente valgono le seguenti relazioni:

  Sia n un numero qualunque non nullo.

  $\frac{0}{n}=0$, infatti effettuando la prova della divisione (denominatore per quoziente = numeratore) si verifica che $n\cdot 0=0$;

  $\frac{0}{0}=k$ (*forma indeterminata*), infatti $0\cdot k=0$ qualunque sia il numero k ;

  $\frac{n}{0}=$ (*forma impossibile*), infatti supponendo, per assurdo, che tale divisione abbia per risultato un numero q , effettuando la prova dovrebbe accadere che $0\cdot q=n$, con $n\neq 0$, e ciò è assurdo in quanto contraddice la *legge di annullamento del prodotto*:

  un prodotto tra n *fattori è nullo se e solo se ammette almeno un fattore nullo*.

Proprietà invariantiva:

Moltiplicando o dividendo numeratore e denominatore di una frazione per uno stesso numero, non nullo, il valore della frazione non cambia.

In simboli: $\forall\, k\neq 0$, $\frac{m}{n}=\frac{m\cdot k}{n\cdot k}=\frac{m:k}{n:k}$.

Tale proprietà permette di affermare che un numero razionale possiede infinite *rappresentazioni frazionarie*, tutte tra loro equivalenti. Ad esempio: $\frac{4}{6}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}=...$.

Una rappresentazione $\frac{m}{n}$ si dice *frazione ridotta ai minimi termini* se m e n sono primi tra loro (ossia se il loro MCD è 1).

Un numero razionale $\frac{m}{n}$ può essere scritto evidenziando il proprio segno come segue:

$\pm\frac{m}{n}$, con $m \in \mathbb{N}_0$ e $n \in \mathbb{N}$.

Un numero razionale risulta positivo se il numeratore m ed il denominatore n della sua rappresentazione frazionaria sono *concordi* (cioè assumono lo stesso segno); viceversa, esso è negativo se m e n sono *discordi* (cioè di segno opposto).

- **Nota 4**

  Vale la seguente equivalenza:

  $\frac{m}{n}=0 \Leftrightarrow m=0$.

  Inoltre $\frac{m}{1}=m$ e $\frac{m}{m}=1$.

Riassumendo: sinora si è dato significato alle quattro operazioni in tutto l'insieme dei numeri razionali, ad eccezione della divisione per zero, che non può aver alcun senso; per tale motivo le quattro operazioni sono dette *operazioni razionali*.

È possibile considerare, ora, una differente rappresentazione dei numeri razionali. Eseguendo la divisione elementare, con i metodi noti dall'aritmetica, tra il numeratore m ed il denominatore n di un numero razionale si giunge alla *rappresentazione decimale*:

$$\pm\frac{m}{n}=\pm\, i\, ,\, d_1 d_2 d_3 \ldots$$

- **Nota 5**

  Si ricordi che per le rappresentazioni introdotte ci si riferisce al *sistema di numerazione decimale* (che utilizza le cifre arabiche 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). È ovvio che i ragionamenti ed i metodi introdotti possono subire notevoli mutamenti nel passaggio ad un sistema di numerazione che non sia in base 10.

La rappresentazione decimale sfrutta un allineamento costituito da un numero intero i , positivo o nullo (*parte intera*), seguito da una virgola (o da un punto nella notazione anglosassone) e da infinite cifre decimali $d_1 d_2 d_3 \ldots$ (*parte decimale*).

La rappresentazione decimale di un numero razionale è di tipo *periodico*, cioè in essa è presente un gruppo di cifre decimali, detto *periodo*, che si ripete infinite volte. L'eventuale gruppo di cifre decimali iniziali, che precede il periodo e che, quindi, non si ripete, è detto *antiperiodo*.

Le cifre del periodo si scrivono una sola volta, sopralineandole o raramente racchiudendole in parentesi tonde, per esempio:

$$72,485\ 7369\ 7369\ 7369\ 7369\ 7369\ 7369\ldots$$

si scrive:

$$\underbrace{72}_{parte\ intera}\ ,\ \underbrace{485}_{antiperiodo}\ \underbrace{\overline{7369}}_{periodo} \quad \text{oppure} \quad 72,485(7369)\ .$$

Se il periodo è composto solo dalla cifra 0, allora esso può sottintendersi ed il numero razionale si dice *numero decimale finito*, per esempio:

$6,800000\ldots$ si può scrivere: $6,8\overline{0}$ oppure $6,8$.

In generale, un numero decimale finito può scriversi come segue:

$$\pm\, i,\ d_1 d_2 d_3 \ldots d_n\ .$$

Per come è stato costruito il sistema di numerazione decimale, che presenta caratteristiche di *posizionalità*, un qualunque intero di n cifre $i_1 i_2 i_3 \ldots i_n$, con $i_1 \neq 0$, può essere espresso in base 10 nel modo seguente:

$$i_1 i_2 i_3 \dots i_n = i_1 \cdot 10^{n-1} + i_2 \cdot 10^{n-2} + i_3 \cdot 10^{n-3} + \dots + i_n \cdot 10^0 .$$

Da quanto appena detto si deduce che vale anche la relazione:

$$\pm i,\ d_1 d_2 d_3 \dots d_n = \pm \left(i + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \dots + \frac{d_n}{10^n} \right) .$$

Tale relazione può essere verificata svolgendo il minimo comune denominatore al secondo membro dell'uguaglianza.

Si invita, ora, il lettore a soffermarsi sulle relazioni precedenti, leggendo una serie di esempi chiarificatori.

- **Esempi**

  1) $12458 = 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$;

  2) $3456 = 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$;

  3) $1.389 = 1 + \frac{3}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{9}{10^3} \overset{\overbrace{}^{m.c.d.}}{=} \frac{1000+300+80+9}{1000}$.

Se un numero razionale è dato nella rappresentazione decimale e lo si vuole esprimere nella *rappresentazione frazionaria* si utilizza la *frazione generatrice* $\frac{a-b}{c}$, dove a è il numero decimale periodico preso senza la virgola (cioè un numero intero costituito dalle cifre della parte intera, dell'antiperiodo eventuale e del periodo, senza considerare zeri iniziali eventuali), b è un numero intero costituito dalle cifre preperiodo (della parte intera e dell'antiperiodo eventuale) e c è un numero intero costituito da tanti 9 quante sono le cifre del periodo e da tanti 0 (eventuali) quante sono le cifre decimali dell'antiperiodo.

- **Esempi**

1) $1.23\overline{4}=\dfrac{1234-123}{900}=\dfrac{1111}{900}$;

2) $7.\overline{8}=\dfrac{78-7}{9}=\dfrac{71}{9}$;

3) $0.003456\overline{87}=\dfrac{345687-3456}{99000000}=\dfrac{342231}{99000000}$;

4) $7.3=7.3\overline{0}=\dfrac{730-73}{90}=\dfrac{657}{90}\underbrace{=}_{semplificando\ per\ 9}\dfrac{73}{10}$.

Si vuole dimostrare, ora, che la rappresentazione di un numero decimale finito può essere trasformata in una frazione mediante la seguente ***regola pratica***:

Si considera il numero decimale finito privo della virgola (ossia l'intero costituito dalle cifre della parte intera e della parte decimale finita) e lo si divide per un numero che ha 1 come prima cifra e tanti 0 quante sono le cifre della parte decimale.

Dim.

Si consideri il seguente numero decimale finito:

$\pm i_1 i_2 \dots i_n \, , \, d_1 d_2 \dots d_k$ con $n, k \in \mathbb{N}$, dove le $i_1 i_2 \dots i_n$ sono le cifre della parte intera e le $d_1 d_2 \dots d_k$ sono le cifre della parte decimale finita. Si ha

$$\pm i_1 i_2 \dots i_n \, , \, d_1 d_2 \dots d_k = \pm i_1 i_2 \dots i_n \, , \, d_1 d_2 \dots d_k \overline{0} =$$

$$= \pm \frac{i_1 i_2 \dots i_n d_1 d_2 \dots d_k 0 - i_1 i_2 \dots i_n d_1 d_2 \dots d_k}{9 \underbrace{00 \dots 0}_{k \text{ zeri}}} =$$

$$= \pm \frac{i_1 i_2 \dots i_n d_1 d_2 \dots d_k \times 10 - i_1 i_2 \dots i_n d_1 d_2 \dots d_k}{9 \times 10^k} =$$

$$= \pm \frac{i_1 i_2 \dots i_n d_1 d_2 \dots d_k \times (10 - 1)}{9 \times 10^k} =$$

$$= \pm \frac{i_1 i_2 \dots i_n d_1 d_2 \dots d_k \times 9}{9 \times 10^k} = \pm \frac{i_1 i_2 \dots i_n d_1 d_2 \dots d_k}{10^k} .$$

■ ■ ■

- **Esempi**

  $7.4 = \frac{74}{10}$; $7.45 = \frac{745}{100}$; $7.451 = \frac{7451}{1000}$;

  $0.45149 = \frac{45149}{100000}$.

- **Nota 6**

  Per convenzione, ogni allineamento periodico di periodo 9 si identifica con un allineamento che si ottiene da esso sostituendo al periodo 9 il periodo 0 ed incrementando di un'unità l'ultima cifra che precede il periodo. Questa convenzione è giustificata in base al fatto che tali allineamenti hanno la stessa frazione generatrice.

  Per esempio:

  $4.5\overline{9}=4.6\overline{0}=4.6$, infatti:

  $4.5\overline{9}=\dfrac{459-45}{90}=\dfrac{414}{90}=\dfrac{23}{5}$ e $4.6=\dfrac{46}{10}=\dfrac{23}{5}$.

A conclusione di questo paragrafo è conveniente fare delle considerazioni sull'operazione di inclusione degli insiemi notevoli finora introdotti. Dal momento che i numeri naturali sono tutti appartenenti anche a $\mathbb{N}_0$, che i numeri non negativi di $\mathbb{Z}$ coincidono con i numeri di $\mathbb{N}_0$ e che i numeri interi relativi $z\in\mathbb{Z}$ possono essere immaginati come una frazione costituita dal numeratore z e dal denominatore 1, allora si deduce che:

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{N}_0\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\ .$$

2.16.2 CONFRONTO TRA NUMERI RAZIONALI

Prima di confrontare due numeri razionali è doveroso fare una premessa. Dati due numeri razionali x e y, vale sempre una ed una sola delle seguenti relazioni (*legge di tricotomia*):

o $x<y$ (x minore di y)

o $x=y$ (x uguale a y)

o $x>y$ (x maggiore di y).

Confronto tra un negativo e un positivo.

Si consideri un numero razionale negativo x, cioè sia $x\in\mathbb{Q}$ e $x<0$.

Si consideri un numero razionale positivo y, cioè sia $y\in\mathbb{Q}$ e $y>0$.

Ogni numero razionale negativo è non solo minore di zero, ma, a maggior ragione, anche minore di ogni numero razionale positivo. Infatti, essendo $x<0$ e $y>0$ allora si può scrivere:

$x<0<y$ e per la proprietà transitiva della disuguaglianza $x<y$.

Confronto tra due positivi.

Si considerino, ora, due numeri razionali positivi x e y. È possibile confrontarli sia nella rappresentazione decimale che in quella frazionaria.

Si valuti dapprima la rappresentazione decimale:

$x = a, a_1 a_2 a_3 \ldots$ e $y = b, b_1 b_2 b_3 \ldots$

risulta:

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a < b & \text{oppure} \\ a = b \quad \text{e} \quad a_1 < b_1 & \text{oppure} \\ a = b,\ a_1 = b_1 \quad \text{e} \quad a_2 < b_2 & \text{oppure} \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Nella rappresentazione frazionaria: $x = \frac{m}{n}$ e $y = \frac{k}{h}$ risulta:

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad m \cdot h < n \cdot k \ .$$

Subito si deduce che, a parità di denominatore $(n = h)$, si ha

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad m < k \ .$$

Confronto tra due negativi.

Per confrontare due numeri razionali negativi, $x < 0$ e $y < 0$ con $x, y \in \mathbb{Q}$, è sufficiente osservare che $-x > 0$, $-y > 0$ e $x < y \Leftrightarrow -x > -y$, pertanto basta operare su $-y < -x$, utilizzando il confronto tra due positivi.

2.16.3 DENSITÀ DI $\mathbb{Q}$ IN SÉ

Proprietà:

Se x e y sono due numeri razionali distinti, esistono infiniti numeri razionali tra essi compresi.

In simboli:

$\forall x,\ y \in \mathbb{Q}$, con $x < y$, $\exists q \in \mathbb{Q} : x < q < y$.

Dim.

Siano x e y due numeri razionali distinti e sia $x < y$.

Si consideri, ora, il numero $\frac{x+y}{2}$. Esso è razionale, in quanto semisomma di due numeri razionali.

Si ha $\frac{x+y}{2} = \frac{x}{2} + \underbrace{\frac{y}{2} > \frac{x}{2}}_{si\ minora\ y\ con\ x} + \frac{x}{2} = \frac{x+x}{2} = \frac{2x}{2} = x$,

da cui $\frac{x+y}{2} > x$ o ciò che è lo stesso $x < \frac{x+y}{2}$.

Inoltre $\frac{x+y}{2} = \underbrace{\frac{x}{2} + \frac{y}{2} < \frac{y}{2}}_{si\ maggiora\ x\ con\ y} + \frac{y}{2} = \frac{y+y}{2} = \frac{2y}{2} = y$,

da cui $\frac{x+y}{2} < y$.

Pertanto, è possibile scrivere che $x < \frac{x+y}{2} < y$.

Si è, così, dimostrato che tra x e y esiste almeno un terzo numero razionale.

Si considerino, ora, i numeri razionali $\dfrac{x+y}{2}$ e y oppure x e $\dfrac{x+y}{2}$. Si calcoli la loro semisomma e si dimostri, analogamente a quanto fatto in precedenza, che essa è compresa tra i due numeri stessi.

Iterando il procedimento, si giunge, così, ad affermare che tra due numeri razionali distinti esistono sempre infiniti altri numeri razionali. Tale proprietà si esprime anche affermando che *l'insieme dei numeri razionali* $\mathbb{Q}$ *è denso in sé.*

■ ■ ■

- **Nota**

  La proprietà di densità di $\mathbb{Q}$ in sé non è valida per le sue parti. In altri termini, i suoi sottoinsiemi $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$ e $\mathbb{Z}$ non sono densi. Per validare quanto affermato basti pensare che tra i numeri interi 3 e 4 (ad esempio) non esiste alcun altro numero intero.

2.16.4 CENNI SUI NUMERI REALI

Un *numero reale* è rappresentato da un allineamento decimale periodico o non periodico, costituito da infinite cifre decimali, del tipo:

$$\pm i,\ d_1 d_2 d_3 \ldots$$

con $i \in \mathbb{N}_0$ e $d_1, d_2, d_3, \ldots$ cifre arabiche, ossia elementi dell'insieme $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Se un allineamento decimale è di tipo periodico, il numero è *razionale*, se invece l'allineamento decimale è di tipo non periodico, il numero si dice *irrazionale*.

L'*insieme dei numeri reali* si denota con $\mathbb{R}$ e può subito essere partizionato nei due sottoinsiemi $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (*insieme dei numeri razionali*) e $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}$ (*insieme dei numeri irrazionali*).

- **Nota**

  Un numero irrazionale, essendo costituito da un allineamento decimale di infinite cifre non periodiche, non può in alcun modo, da un punto di vista operativo, essere descritto mediante una rappresentazione decimale (non essendo possibile la scrittura di tutte le infinite cifre decimali che lo compongono); pertanto, è necessario indicarlo con un simbolo che rappresenti un metodo di ricerca di tali cifre fino all'ordine desiderato. In altri termini, assegnare un numero irrazionale significa assegnare una legge che permetta di determinare quante cifre decimali dell'allineamento si vogliano. Ad esempio: $\sqrt{2}$ è un irrazionale e la radice quadrata che lo rappresenta indica un metodo di ricerca di tutte le cifre decimali che si vogliono conoscere, ma è ovvio che nel momento in cui si ricavano tali cifre e si scrive l'irrazionale in rappresentazione decimale, è necessario approssimarlo, troncando ad un numero finito le cifre decimali.

L'introduzione dei numeri reali o, in modo equivalente, l'estensione dei numeri razionali ad un insieme più ampio è dovuta a due ragioni fondamentali, una di tipo algebrico ed una di tipo geometrico.

Ragione algebrica.

La ragione algebrica che ha condotto all'introduzione dei numeri reali è da ritrovarsi nella ricerca delle soluzioni di alcune equazioni di grado superiore al primo, ad esempio: $x^2=2$.

Teorema

L'equazione $x^2=2$ *non ammette alcuna soluzione razionale.*

Dim.

Si ragioni per assurdo, negando la tesi. Si supponga, cioè, che esista almeno una soluzione razionale, indicata con $x=\frac{m}{n}$, dove m e n sono interi primi tra loro. Si noti che è sempre possibile esprimere $\frac{m}{n}$ in modo che m e n siano primi tra loro; è sufficiente, infatti, che la frazione sia ridotta ai minimi termini.

Se il numero $\frac{m}{n}$ è soluzione dell'equazione $x^2=2$, esso la verifica, pertanto è possibile scrivere:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2=2 \;\Rightarrow\; \frac{m^2}{n^2}=2 \;\Rightarrow\; m^2=2n^2 .$$

Si giunge, così, ad affermare che m^2 è un numero pari, dal momento che è possibile esprimerlo come multiplo di 2.

Ora, se m^2 è pari, anche m è pari (infatti, se m fosse dispari, darebbe m^2 dispari). Ciò permette di esprimere m pari come multiplo di 2 nel seguente modo: $m=2k$, con k intero.

Sostituendo l'espressione $m=2k$ nella relazione $m^2=2n^2$, si ha $(2k)^2=2n^2$, da cui $4k^2=2n^2 \;\Rightarrow\; 2k^2=n^2$.

Da quest'ultima relazione si deduce che anche n^2, e quindi n, è pari, ma ciò è assurdo, perché non è possibile che m e n siano entrambi pari, in quanto sono stati considerati primi tra loro.

Si è, dunque, commesso un errore negando la tesi, che non può essere che vera.

■ ■ ■

Ragione geometrica.

La ragione geometrica che ha condotto all'introduzione dei numeri reali è la seguente:

la misura di una grandezza geometrica relativa ad una grandezza omogenea (assunta come unità di misura) non può sempre essere espressa mediante un numero razionale.

In altre parole, esistono *grandezze commensurabili* e *grandezze incommensurabili*.

Si considerino due segmenti $\underline{w}$ ed $\underline{u}$ di una retta e sia $\underline{u}$ non nullo. Si dice che $\underline{w}$ ed $\underline{u}$ sono *commensurabili* se esiste almeno una coppia di numeri naturali m e n tali che il segmento $\underline{w}$ sia costituito dalla somma di m segmenti, ciascuno uguale alla ennesima parte di $\underline{u}$.

In simboli:

Se $\exists m, n \in \mathbb{N}: \ \underline{w} = \frac{m}{n} \underline{u} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{w}$ ed $\underline{u}$ sono commensurabili.

In tal caso, il rapporto $\frac{m}{n}$ si dice *misura razionale* del segmento $\underline{w}$ rispetto all'unità di misura $\underline{u}$.

- **Nota 1**

  Si noti che se esiste almeno una coppia di numeri naturali m e n che verifica la commensurabilità dei due segmenti, ne esistono necessariamente infinite, infatti la coppia $(m \cdot k, n \cdot k)$ con $k \in \mathbb{N}$ verifica anch'essa la relazione di commensurabilità e determina sempre la misura $\frac{m}{n}$ di $\underline{w}$ rispetto ad $\underline{u}$.

- **Nota 2**

  Per convenzione si considera il segmento nullo $\underline{o}$ (di estremi coincidenti) commensurabile con $\underline{u}$ e si attribuisce ad esso misura uguale a zero.

- **Nota 3**

  Si osservi che nel caso $\underline{w} = \underline{u}$, la misura di $\underline{w}$ rispetto ad $\underline{u}$ è unitaria, ecco perché $\underline{u}$ viene detto *unità di misura*.

Si dice che $\underline{w}$ ed $\underline{u}$ sono *incommensurabili* se per ogni fissata coppia di numeri naturali m e n si ha sempre $\underline{w} \neq \frac{m}{n} \underline{u}$.

Un esempio di grandezze incommensurabili è fornito dalla diagonale e dal lato di un quadrato, il cui rapporto genera il numero irrazionale $\sqrt{2}$, un altro esempio è dato dalla circonferenza e dal diametro di un qualunque cerchio, il cui rapporto genera il numero irrazionale π .

L'esistenza di grandezze incommensurabili conduce alla ricerca di un insieme numerico, che, oltre ai numeri razionali, contenga anche altri numeri, in modo tale da poter definire la misura di un segmento rispetto ad un altro nel senso più generale possibile.

Siano, ora, $\underline{w}$ ed $\underline{u}$ due segmenti qualunque di una retta (non necessariamente commensurabili) e sia $\underline{u}$ non nullo.

Si dice *misura reale* del segmento $\underline{w}$ rispetto ad $\underline{u}$ l'allineamento decimale del tipo:

$$i\,,\, d_1 d_2 d_3 \ldots$$

individuato con il seguente *c r i t e r i o*:

Sia i il più grande numero intero non negativo per il quale risulta $i\underline{u} \leqslant \underline{w}$, si avrà che $(i+1)$ è il più piccolo intero positivo per il quale risulta $(i+1)\underline{u} > \underline{w}$.

Dunque, si ha

$$i\underline{u} \leqslant \underline{w} < (i+1)\underline{u} \,.$$

Tali affermazioni e, in particolare, l'esistenza di un intero i con le suddette caratteristiche, sono basate sul *postulato di Archimede* che afferma: *considerati due segmenti distinti, esiste sempre un multiplo del minore che supera il maggiore.*

Se $i\underline{u}=\underline{w}\ \Rightarrow\ \underline{w}$ ed $\underline{u}$ sono commensurabili ed i è la misura razionale di $\underline{w}$ rispetto ad $\underline{u}$.

Se $i\underline{u}<\underline{w}$, sia d_1 la più grande cifra decimale per la quale risulta $(i,d_1)\underline{u}\leqslant\underline{w}$, si avrà

$$(i,d_1)\underline{u}\leqslant\underline{w}<\left(i,d_1+\frac{1}{10}\right)\underline{u}\,.$$

Se $(i,d_1)\underline{u}=\underline{w}\ \Rightarrow\ \underline{w}$ ed $\underline{u}$ sono commensurabili ed (i,d_1) è la misura razionale di $\underline{w}$ rispetto ad $\underline{u}$.

Se $(i,d_1)\underline{u}<\underline{w}$, sia d_2 la più grande cifra decimale per la quale risulta $(i,d_1d_2)\underline{u}\leqslant\underline{w}$, si avrà

$$(i,d_1d_2)\underline{u}\leqslant\underline{w}<\left(i,d_1d_2+\frac{1}{10^2}\right)\underline{u}\,.$$

Se $(i,d_1d_2)\underline{u}=\underline{w}\ \Rightarrow\ \underline{w}$ ed $\underline{u}$ sono commensurabili ed (i,d_1d_2) è la misura razionale di $\underline{w}$ rispetto ad $\underline{u}$.

Se $(i,d_1d_2)\underline{u}<\underline{w}$, si itera il procedimento.

Se si giunge, dopo un numero finito di passi, ad un numero decimale finito del tipo $(i,d_1d_2...d_n)$ per il quale risulta $(i,d_1d_2...d_n)\underline{u}=\underline{w}\ \Rightarrow\ \underline{w}$ ed $\underline{u}$ sono commensurabili ed $(i,d_1d_2...d_n)$ è la misura razionale di $\underline{w}$ rispetto ad $\underline{u}$.

Se, invece, il procedimento non si arresta e si ripete indefinitamente, si giunge alla costruzione di due classi di numeri razionali, la prima rappresenta le *misure approssimate per difetto di* $\underline{w}$ *rispetto ad* $\underline{u}$, la seconda, invece, le *misure approssimate per eccesso di* $\underline{w}$ *rispetto ad* $\underline{u}$:

Misure approssimate per difetto	**Misure approssimate per eccesso**
i	$i+1$
i, d_1	$i, d_1 + \frac{1}{10}$
$i, d_1 d_2$	$i, d_1 d_2 + \frac{1}{10^2}$
$i, d_1 d_2 d_3$	$i, d_1 d_2 d_3 + \frac{1}{10^3}$
...	...

Il criterio seguito porta alla costruzione dell'allineamento $i, d_1 d_2 d_3 \ldots$ con infinite cifre decimali.

Se tale allineamento risulta periodico, $\underline{w}$ ed $\underline{u}$ sono commensurabili e $i, d_1 d_2 d_3 \ldots$ è la *misura razionale* di $\underline{w}$ rispetto ad $\underline{u}$.

Se l'allineamento non è periodico, $\underline{w}$ ed $\underline{u}$ sono *incommensurabili* e $i, d_1 d_2 d_3 \ldots$ è la *misura irrazionale* di $\underline{w}$ rispetto ad $\underline{u}$.

In generale, è possibile affermare che $i, d_1 d_2 d_3 \ldots$ è la *misura reale* di $\underline{w}$ rispetto ad $\underline{u}$.

2.16.5 CONFRONTO TRA NUMERI REALI

Come già accennato per i numeri razionali, prima di confrontare due numeri reali è opportuno fare una premessa.

Dati due numeri reali x e y, vale sempre una ed una sola delle seguenti relazioni:

o $x<y$ o $x=y$ o $x>y$ (*legge di tricotomia*). Tale proprietà si esprime dicendo che l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ è *totalmente ordinato*.

Confronto tra un negativo e un positivo.

Si consideri un numero reale negativo x, cioè sia $x\in\mathbb{R}$ e $x<0$.

Si consideri un numero reale positivo y, cioè sia $y\in\mathbb{R}$ e $y>0$.

Ogni numero reale negativo è non solo minore di zero, ma a maggior ragione anche minore di ogni numero reale positivo. Infatti, essendo $x<0$ e $y>0$ allora è possibile scrivere:

$x<0<y$ e per la proprietà transitiva della disuguaglianza $x<y$.

Confronto tra due positivi.

Il confronto tra due numeri reali positivi x e y si effettua in modo analogo al caso di due numeri razionali nella rappresentazione decimale.

Si considerino, ora, due numeri reali positivi x e y, più precisamente:

$x = a\, , a_1 a_2 a_3 \ldots$ e $y = b\, , b_1 b_2 b_3 \ldots$

risulta:

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a < b & \text{oppure} \\ a = b \quad \text{e} \quad a_1 < b_1 & \text{oppure} \\ a = b,\ a_1 = b_1 \ \text{ e } \ a_2 < b_2 & \text{oppure} \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Confronto tra due negativi.

Per confrontare due numeri reali negativi, $x < 0$ e $y < 0$ con $x, y \in \mathbb{R}$, è sufficiente osservare che $-x > 0$, $-y > 0$ e $x < y \Leftrightarrow -x > -y$, pertanto basta operare su $-y < -x$, utilizzando il confronto tra due reali positivi.

- **Approfondimento**

  Si noti che il simbolo $<$ indica una *relazione d'ordine stretto* nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. In $\mathbb{R}$ è possibile considerare anche una *relazione d'ordine largo* del tipo $\leqslant$, il cui significato è il seguente: $x \leqslant y \Leftrightarrow$ o $x < y$ o $x = y$. Le definizioni di relazioni d'ordine, tuttavia, esulano dagli intenti di questo testo.

2.16.6 DENSITÀ DI $\mathbb{R}$ IN SÉ

Proprietà:

Se x e y sono due numeri reali distinti, esistono infiniti numeri reali tra essi compresi.

In simboli:

$\forall x,\ y \in \mathbb{R}$, con $x < y$, $\exists z \in \mathbb{R}:\ x < z < y$.

Dim.

Si dimostra in modo analogo alla proprietà di densità di $\mathbb{Q}$ in sé.

■ ■ ■

2.16.7 DENSITÀ DI $\mathbb{Q}$ IN $\mathbb{R}$

Proprietà:

Se x e y sono due numeri reali distinti, esistono infiniti numeri razionali tra essi compresi.

In simboli:

$\forall x,\ y \in \mathbb{R}$, con $x < y$, $\exists q \in \mathbb{Q}:\ x < q < y$.

Dim.

Si considerino due numeri reali distinti, x e y , e sia $x < y$.

Si possono presentare i seguenti casi:

1) x e y sono razionali;

2) x e y sono irrazionali;

3) x è razionale e y è irrazionale;

4) x è irrazionale e y è razionale.

1) Se x e y sono entrambi razionali si ritorna alla proprietà di densità di $\mathbb{Q}$ in sé.
2) Se x e y sono entrambi irrazionali (per semplicità si suppongano positivi, ma il discorso vale anche se uno dei due o entrambi sono negativi), è possibile esprimerli con allineamenti decimali non periodici del tipo:
   $x=m,c_1c_2c_3...$ e $y=n,d_1d_2d_3...$ dove m e $n\in\mathbb{N}_0$ e $c_1,c_2,c_3,...$ e $d_1,d_2,d_3,...$ sono cifre arabiche.
   Essendo $x<y$,
   se $m<n \Rightarrow (m,c_1c_2c_3...)=x<n$,
   inoltre $n<(n,d_1d_2d_3...)=y$, quindi: $\exists n\in\mathbb{N}:x<n<y$.
   Se $m=n$ e $c_1<d_1 \Rightarrow (m,c_1c_2c_3...)=x<(n,d_1)$;
   inoltre $(n,d_1)<(n,d_1d_2d_3...)=y$, quindi:
   $\exists(n,d_1)\in\mathbb{Q}: x<(n,d_1)<y$.

Se $m=n$, $c_1=d_1$ e $c_2<d_2$ $\Rightarrow (m,c_1c_2c_3...) = x<(n,d_1d_2)$,

inoltre $(n,d_1d_2)<(n,d_1d_2d_3...) = y$, quindi:

$\exists (n,d_1d_2)\in\mathbb{Q}$: $x<(n,d_1d_2)<y$.

Iterando il procedimento, si nota che esiste sempre almeno un numero razionale $q\in\mathbb{Q}$ compreso tra i due numeri irrazionali x e y.

3) Se x è un numero razionale può essere espresso con un allineamento decimale periodico: $x=m,c_1c_2c_3...$ e se y è un numero irrazionale può essere espresso con un allineamento decimale non periodico: $y=n,d_1d_2d_3...$

   La dimostrazione è analoga alla 2).

4) La dimostrazione è analoga alla 3).

■ ■ ■

2.16.8 DENSITÀ DI $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ IN $\mathbb{R}$

Proprietà:

Se x e y sono due numeri reali distinti, esistono infiniti numeri irrazionali tra essi compresi.

In simboli:

$\forall x,\ y\in\mathbb{R}$, con $x<y$, $\exists w\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$: $x<w<y$.

Dim.

Si considerino due numeri reali distinti, x e y, e sia $x<y$.

Si possono presentare i seguenti casi:

1) x e y sono razionali;

2) x e y sono irrazionali;

3) x è razionale e y è irrazionale;

4) x è irrazionale e y è razionale.

1) Siano x e y entrambi razionali e sia $z\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$, con $z>0$ e $(y-x)<z$. Per il postulato di *Archimede* (in forma algebrica), dati due numeri positivi $(y-x)$ e z, con $(y-x)<z$, esiste almeno un numero naturale n tale che $n(y-x)>z$.

   Si consideri tale naturale $n\in\mathbb{N}$: $0<z<n(y-x)$.

   Da cui $z<ny-nx$ e $z+nx<ny$; dividendo per n si ha $\frac{z}{n}+x<y$, ma allo stesso tempo $x<\frac{z}{n}+x$, essendo z e n entrambi positivi. Si deduce che $x<\frac{z}{n}+x<y$.

   Dal momento che z è irrazionale, anche $\frac{z}{n}+x$ lo sarà e, detto

w tale numero, si ha $\exists w \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) : x < w < y$.

2) Siano x e y entrambi irrazionali.

Si consideri, ora, il numero $\frac{x+y}{2}$. Esso è irrazionale in quanto semisomma di due numeri irrazionali.

Si ha $\frac{x+y}{2} = \frac{x}{2} + \underbrace{\frac{y}{2} > \frac{x}{2}}_{si\ minora\ y\ con\ x} + \frac{x}{2} = \frac{x+x}{2} = \frac{2x}{2} = x$,

da cui $\frac{x+y}{2} > x$ o ciò che è lo stesso $x < \frac{x+y}{2}$.

Inoltre $\frac{x+y}{2} = \underbrace{\frac{x}{2} + \frac{y}{2} < \frac{y}{2}}_{si\ maggiora\ x\ con\ y} + \frac{y}{2} = \frac{y+y}{2} = \frac{2y}{2} = y$,

da cui $\frac{x+y}{2} < y$.

Pertanto, è possibile scrivere che $x < \frac{x+y}{2} < y$.

È stato così dimostrato che tra x e y esiste almeno un terzo numero irrazionale $w = \frac{x+y}{2}$.

3) Siano x un razionale e y un irrazionale. Si consideri, ora, il numero $\frac{x+y}{2}$. Esso è irrazionale in quanto semisomma di un razionale ed un irrazionale.

A questo punto si procede come 2).

4) Siano x un irrazionale e y un razionale. Si consideri, ora, il numero $\frac{x+y}{2}$. Esso è irrazionale in quanto semisomma di un irrazionale ed un razionale.
   A questo punto si procede come 2).

■ ■ ■

2.17 POTENZA DEL NUMERABILE DI $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$

Si è già introdotto il concetto di insieme numerabile nel paragrafo 2.4 relativo alla potenza di un insieme, ora, però, è necessario dettagliare quanto già accennato.

Si ricordi che il concetto di potenza di un insieme non va confuso con quello del numero di elementi dell'insieme stesso, al quale può essere ricondotto esclusivamente nel caso di insiemi finiti.

Il discorso si complica alquanto per gli insiemi infiniti, per i quali, in genere, non è determinabile il numero di elementi. Infatti, nel caso di insiemi infiniti, è addirittura possibile che un insieme corrisponda biunivocamente ad un suo sottoinsieme proprio, assumendone così la stessa potenza. Anzi, a questo punto, è opportuno introdurre la seguente definizione alternativa a quella già fornita per un insieme infinito.

Seconda definizione di insieme infinito. Un insieme si dice *infinito* se e solo se è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio.

Per chiarire quanto affermato è opportuno introdurre la seguente proposizione.

Proposizione

L'insieme D dei numeri dispari è equipotente ad $\mathbb{N}$.

Dim.

Da un punto di vista intuitivo sembra che i numeri interi siano più dei numeri dispari e che, allo stesso tempo, li contengano strettamente, cioè $D \subset \mathbb{N}$. Ciononostante, è possibile creare una corrispondenza biunivoca tra gli interi ed i dispari del tipo $d = 2n - 1$, con $n \in \mathbb{N}$.

In forma sagittale:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\mathbb{N} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
D & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & \ldots
\end{array}
$$

Da ciò si evince che l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ ed il suo sottoinsieme proprio D dei numeri dispari hanno la stessa potenza, ma apparentemente essi non hanno lo stesso numero di elementi (esiste almeno un numero pari appartenente ai naturali che, però, non appartiene ai dispari).

■ ■ ■

La proposizione appena dimostrata e la seconda definizione di insieme infinito permettono di affermare che $\mathbb{N}$ *è un insieme infinito*.

Definizione di potenza del numerabile. Si dice *potenza del numerabile* la potenza di $\mathbb{N}$ e di ogni insieme equipotente ad esso. Tale potenza si denota con $\aleph_0$ (*aleph zero*, come già visto in precedenza).

Proposizione

L'insieme $\mathbb{N}_0$ ha la potenza del numerabile.

Dim.

Per dimostrare che l'insieme $\mathbb{N}_0$ dei numeri naturali con lo zero ha la potenza del numerabile, deve esistere almeno una corrispondenza biunivoca che relazioni $\mathbb{N}$ con $\mathbb{N}_0$.

Si consideri la seguente corrispondenza:

$n_0 = n - 1$ con $n \in \mathbb{N}$.

Sagittalmente:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\mathbb{N} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \\
& \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
\mathbb{N}_0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots
\end{array}
$$

La corrispondenza considerata è biunivoca, pertanto $\mathbb{N}_0$ ha la potenza del numerabile.

■■■

Proposizione

L'insieme $\mathbb{Z}$ ha la potenza del numerabile.

Dim.

È necessario ricercare almeno una corrispondenza biunivoca che relazioni $\mathbb{N}$ con $\mathbb{Z}$.

Si consideri la seguente corrispondenza:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{N} & & \mathbb{Z} \\
2k-1 & \leftrightarrow & k-1 \\
2k & \leftrightarrow & -k
\end{array}
\text{, con } k \in \mathbb{N}.
$$

Se $k=1 \Rightarrow \begin{array}{ccc} 2k-1=1 & \leftrightarrow & k-1=0 \\ 2k=2 & \leftrightarrow & -k=-1 \end{array}$;

se $k=2 \Rightarrow \begin{array}{ccc} 2k-1=3 & \leftrightarrow & k-1=1 \\ 2k=4 & \leftrightarrow & -k=-2 \end{array}$;

se $k=3 \;\Rightarrow\; \begin{matrix} 2k-1=5 & \leftrightarrow & k-1=2 \\ 2k=6 & \leftrightarrow & -k=-3 \end{matrix}$;

se $k=4 \;\Rightarrow\; \begin{matrix} 2k-1=7 & \leftrightarrow & k-1=3 \\ 2k=8 & \leftrightarrow & -k=-4 \end{matrix}$;

...

In forma sagittale:

$$\begin{matrix} \mathbb{N} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \mathbb{Z} & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & -4 & \ldots \end{matrix}$$

Tale corrispondenza biunivoca rende $\mathbb{Z}$ equipotente a $\mathbb{N}$, pertanto $\mathbb{Z}$ ha la potenza del numerabile.

■ ■ ■

Proposizione

L'insieme $\mathbb{Q}$ ha la potenza del numerabile.

Dim.

Analogamente a quanto fatto per $\mathbb{N}_0$ e $\mathbb{Z}$, bisogna ricercare una corrispondenza biunivoca che metta in relazione $\mathbb{N}$ con $\mathbb{Q}$.

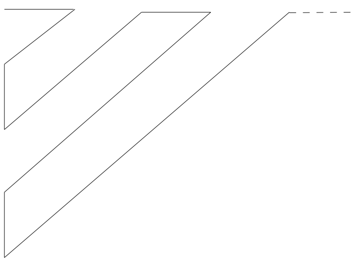
A tal fine si dispongano gli elementi positivi di $\mathbb{Q}$ con un ordine tabellare.

$\mathbb{Q}^+$	1/1,	1/2,	1/3,	1/4,	1/5,	1/6,	1/7,	1/8,...
	2/1,	2/2,	2/3,	2/4,	2/5,	2/6,	2/7,	2/8,...
	3/1,	3/2,	3/3,	3/4,	3/5,	3/6,	3/7,	3/8,...
	4/1,	4/2,	4/3,	4/4,	4/5,	4/6,	4/7,	4/8,...
	...							

Ora, si scriva un allineamento di razionali secondo il seguente *criterio iterativo*:

Si posizioni l'elemento nullo: 0.

Si segua, poi, nella tabella un percorso a serpentina come in figura:



Dal primo elemento in alto a sinistra, un passo a destra e diagonale basso-sinistra, un passo in basso e diagonale alto-destra, un passo a destra e diagonale basso-sinistra, un passo in basso e diagonale alto-destra, e così via.

Si allineino i numeri razionali, facendo attenzione a non ripetere elementi equivalenti a quelli già scritti in precedenza e ponendo accanto ad ogni elemento considerato il suo opposto, in modo da non tralasciare i razionali negativi.

Si potrà scrivere il seguente allineamento:

$0,\ 1/1,\ -1/1,\ 1/2,\ -1/2,\ 2/1,\ -2/1,\ 3/1,\ -3/1,$
$1/3,\ -1/3,\ 1/4,\ -1/4,\ 2/3,\ -2/3,\ 3/2,\ -3/2,$
$4/1,\ -4/1,\ 5/1,\ -5/1,\ 1/5,\ -1/5\ \ldots$

Ora è sufficiente relazionare ogni numero naturale con un numero del suddetto allineamento e la corrispondenza biunivoca cercata è ultimata.

In forma sagittale:

$$\begin{array}{cccccccccc} \mathbb{N} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \mathbb{Q} & 0 & 1/1 & -1/1 & 1/2 & -1/2 & 2/1 & -2/1 & 3/1 & \ldots \end{array}$$

Si è, così, dimostrato che anche l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ ha la potenza del numerabile.

■ ■ ■

2.18 POTENZA DEL CONTINUO

Dopo aver chiarito il concetto della potenza di $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, è lecito chiedersi quale sia la potenza dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali e se anch'esso abbia la potenza del numerabile.

Proposizione *(di Cantor)*

L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ *non ha la potenza del numerabile.*

Dim.

Si dimostri questa proposizione per assurdo. Si supponga, per assurdo, che $\mathbb{R}$ abbia la potenza del numerabile; ciò si traduce nella possibilità di allineare tutti gli elementi di $\mathbb{R}$ e di porli in corrispondenza biunivoca con gli elementi di $\mathbb{N}$.

Si cominci a costruire questo allineamento con tutti i numeri reali compresi tra *0* e *1* (in forma decimale):

$a_1=0,a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}...$

$a_2=0,a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}...$

$a_3=0,a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}...$

$a_4=0,a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}...$

...

Si vuole, ora, dimostrare che, nonostante la astrazione costruita, i numeri reali sopra scritti non rappresentano tutti i reali compresi tra zero e uno, cosicché non è possibile elencare tutti i numeri reali e, di conseguenza, non è possibile metterli in relazione con $\mathbb{N}$.

A tal proposito, si consideri il reale compreso tra zero e uno $y=0,y_1y_2y_3y_4y_5\cdots$ con le seguenti caratteristiche (dette della *diagonale di Cantor*):

$y_1\neq a_{11}$, $y_2\neq a_{22}$, $y_3\neq a_{33}$, $y_4\neq a_{44}$, …

Confrontando il reale y con ciascun reale a_n introdotto, si nota

che $y \neq a_n$ (qualunque sia *n*, dal momento che si diversificano per la *n-ma* cifra) e che, quindi, l'allineamento di reali scritti non può rappresentare tutti i numeri compresi tra zero e uno. Da ciò si evince che non è possibile allineare tutti i reali in forma decimale e, conseguentemente, non può esistere alcuna corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{N}$.
Si conclude che $\mathbb{R}$ non ha la potenza del numerabile, ma una potenza propria.

- **Nota 1**

  Nella dimostrazione appena conclusa bisogna notare un'imprecisione: gli allineamenti decimali reali possono avere, in alcuni casi, delle rappresentazioni equivalenti. In particolare, un numero che termina con periodo 9 ha sempre un equivalente che termina con un periodo 0, per es. $4{,}6\overline{9}$ e $4{,}7\overline{0}$ sono due rappresentazioni decimali equivalenti di uno stesso reale, precisamente $47/10$. Ciò significa che anche se i due allineamenti y e a_n sono diversi, non vi è certezza che i reali da essi rappresentati siano effettivamente diversi. A tale scopo è necessario costruire il numero y con maggiore prudenza, dando il giusto peso alle cifre 0 e 9, nel caso di periodicità.

■ ■ ■

Definizione di potenza del continuo. Si dice *potenza del continuo* la potenza di $\mathbb{R}$ e di ogni insieme equipotente ad esso. Tale potenza si denota con $\mathbf{c}$ od anche con $\aleph_1$ (*aleph uno*).

Proposizione

L'insieme dei numeri reali compresi tra a e b (con $a, b \in \mathbb{R}$ e a<b) ha la potenza del continuo.

Dim.

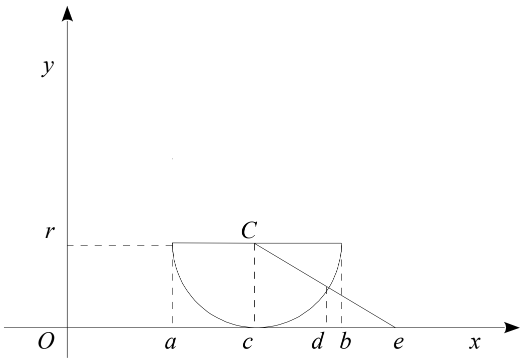
La dimostrazione che segue presuppone conoscenze relative alla geometria analitica e agli intervalli numerici.

Sia $c = \frac{a+b}{2}$ il punto medio dell'intervallo aperto da *a* a *b* e sia

$r = \frac{b-a}{2}$ il raggio di tale intervallo.

Si consideri, nel piano Oxy, la semicirconferenza di centro $C(c; r)$ e raggio r, tangente all'asse delle ascisse. Il diametro orizzontale, privo degli estremi, di questa circonferenza indica proprio l'insieme dei numeri reali da *a* a *b* che è stato introdotto. Sia f il fascio di rette di centro proprio in C e siano d ed e le ascisse delle rispettive intersezioni con la semicirconferenza e con l'asse delle x. È evidente che $a<d<b$ e che $e \in \mathbb{R}$.

La retta così considerata instaura una corrispondenza biunivoca tra d (il generico elemento dell'intervallo da a a b) ed e (elemento di $\mathbb{R}$).



La corrispondenza biunivoca considerata permette di concludere che l'insieme dei numeri reali compresi tra a e b (con $a<b$), esclusi gli estremi, ha la potenza del continuo.

■ ■ ■

- **Nota 2**

  Alcuni degli insiemi che presentano la potenza del continuo sono l'insieme dei numeri irrazionali, l'insieme dei numeri complessi, l'insieme delle parti dei numeri naturali ed altri.

- **Nota 3**

  Il termine *continuo* è in uso ad indicare la retta dei numeri reali, che esprime in pieno il concetto di continuità, in quanto priva di lacune.

2.19 NUMERI TRANSFINITI E IPOTESI DEL CONTINUO

Con i *numeri transfiniti* si è soliti indicare degli infiniti con diversi ordini di grandezza . Il termine *transfinito* è introdotto da *Cantor* come sinonimo del termine *infinito*, bandito dal suo insieme lessicale per evitare scontri con la Chiesa. Con le sue teorie, infatti, *Cantor* introduce una pluralità di infiniti che può collidere con l'unicità dell'infinito della religione cristiana.

Sono già stati introdotti i primi due transfiniti (cardinali): $\aleph_0$ e $\aleph_1$.

Ci si chiede, ora, se esiste una relazione tra i due.

Si ricordi che lo stesso *Cantor* ha dimostrato che un insieme qualunque A ha sempre potenza minore di quella del suo insieme delle parti, cioè $|A|<2^{|A|}$. Si consideri un insieme che abbia la potenza del numerabile e, a tal proposito, si scelga proprio l'insieme $\mathbb{N}$. Sia $P(\mathbb{N})$ l'insieme delle parti di $\mathbb{N}$.

La potenza di $P(\mathbb{N})$ è $2^{\aleph_0}$ ed è immediato dedurre che $\aleph_0<2^{\aleph_0}$.

Pertanto, l'insieme $P(\mathbb{N})$ non ha la potenza del numerabile. Più precisamente è possibile dimostrare (ma tale dimostrazione esula dagli intenti del testo) che $P(\mathbb{N})$ ha la potenza del continuo, pertanto: $\mathbf{c}=\aleph_1=2^{\aleph_0}$.

A questo punto è lecito chiedersi se esiste un numero transfinito compreso tra $\aleph_0$ e $\aleph_1$.

Ipotesi del continuo (in forma debole).

Non esiste alcun insieme la cui potenza è strettamente compresa tra quella dei numeri interi e quella dei numeri reali.

In simboli:

$\neg\exists A:\ \aleph_0<|A|<\aleph_1$.

L'ipotesi del continuo di *Cantor*, che egli stesso non è riuscito a dimostrare, si è poi rivelata un'*ipotesi indecidibile* nella teoria degli insiemi *ZFC*, ossia non è possibile in tale teoria (di cui si tratterà nel seguito) né dimostrarla né confutarla.

Accertata la relazione tra $\aleph_0$ e $\aleph_1$, è lecito chiedersi se esistono infiniti con potenze superiori a quella del continuo.

Cantor giunge all'esistenza di una successione di transfiniti, $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \ldots$, che chiama *transfiniti cardinali*, per i quali vale la relazione $\aleph_0<\aleph_1<\aleph_2<\aleph_3<\ldots$ e per i quali è possibile generalizzare l'ipotesi del continuo.

Ipotesi del continuo (in forma forte).
Non esiste alcun insieme la cui potenza è strettamente compresa tra un transfinito e il suo successivo.

In simboli:
$\neg\exists A:\ \aleph_k < |A| < \aleph_{k+1}$, con $k \in \mathbb{N}_0$.

- **Nota**

  Si osservi che la potenza di $\mathbb{R}$ è la seguente:
  $|\mathbb{R}| = \mathbf{c} = \aleph_1 = 2^{\aleph_0} = |P(\mathbb{N})|$, inoltre $|\mathbb{R}| < 2^{|\mathbb{R}|}$, dove $2^{|\mathbb{R}|} = |P(\mathbb{R})|$. Dunque, l'insieme delle parti di $\mathbb{R}$ ha una potenza superiore a $\aleph_1$, tale potenza rappresenta $\aleph_2$.
  Analogamente, l'insieme delle parti dell'insieme delle parti di $\mathbb{R}$ ha una potenza superiore a $\aleph_2$ e rappresenta $\aleph_3$. Iterando il procedimento si ottiene la successione di cardinali transfiniti di *Cantor*:

  $$\aleph_0 = |\mathbb{N}|$$
  $$\aleph_1 = 2^{\aleph_0} = |P(\mathbb{N})|$$
  $$\aleph_2 = 2^{\aleph_1} = |P(P(\mathbb{N}))|$$

$$\aleph_3 = 2^{\aleph_2} = |P(P(P(\mathbb{N})))|$$

...

$$\aleph_k = 2^{\aleph_{k-1}} = |\underbrace{P(P(P(\ldots(P(\mathbb{N})))))}_{k\ volte}|$$

...

2.20 CRITICHE ALLA TEORIA INGENUA

Sono stati volutamente introdotti i concetti finora esposti secondo quella, che, nel corso degli anni, è stata denominata *teoria ingenua degli insiemi*. Tale teoria, delineata da *Cantor* nel XIX secolo, sebbene intuitiva, permette di operare in modo organico e concreto con gli insiemi ed è molto utile per sviluppare abilità negli esercizi.

Una buona conoscenza della teoria ingenua degli insiemi è essenziale, come prima fase di studio, per meglio comprendere le motivazioni che hanno, poi, condotto verso la più recente *teoria assiomatica degli insiemi*.

Assumere che si possa eseguire qualunque operazione sugli insiemi, senza restrizione alcuna, in modo completamente arbitrario e con la convinzione che siano sufficienti due soli principi per poter fondare l'intera matematica sulla teoria degli insiemi, è stato il punto cardine che ha mosso lo spirito di *Gottlob*

Frege, matematico e filosofo tedesco. *Frege* con un'opera, a dir suo "rivoluzionaria", riconosce la possibilità di basare ogni cardine matematico sulla teoria degli insiemi, riconducendo il tutto a due soli principi: il *principio di estensionalità*, già precedentemente introdotto da *Leibniz*, secondo cui due insiemi con gli stessi elementi sono uguali, e il *principio di comprensione*, secondo il quale ogni proprietà caratteristica identifica un insieme, l'insieme di tutti gli oggetti che godono di quella proprietà, e ogni insieme è identificato da una proprietà caratteristica, cioè è sempre possibile trovare una proprietà che accomuna gli elementi di un insieme.

Lo stesso *Georg Cantor* delinea le sue teorie facendo uso di strumenti matematici intuitivi ed ingenui analoghi a quelli su cui si era basato *Frege*, nel tentativo di produrre una costruzione della matematica completamente basata sulla logica.

Bertrand Russell, con una lettera a *Frege*, prima, e con una pubblicazione ne *I principi della matematica*, poi, evidenzia le contraddizioni insite nel principio di comprensione, illustrando alcuni paradossi ed antinomie cui la teoria giunge.

La scoperta di tali antinomie provoca una falla enorme nella teoria del matematico tedesco *Frege* che, *Russell* stesso, invano, cerca di colmare con la *teoria dei tipi* nella sua già citata opera.

Antinomia di *Russell*.

Russell solleva il seguente quesito: *un insieme può essere o meno elemento di sé stesso?*

Inizialmente, ad un'analisi poco attenta, sembra che la risposta sia decisamente negativa. Si pensi all'insieme delle vocali, ad esempio: $A=\{a, e, i, o, u\}$. È evidente che A non è elemento di sé stesso, in quanto non è elencato tra i suoi elementi.

Si consideri, ora, un altro esempio:

$B=\{X : X \text{ è un insieme con più di 2 elementi}\}$.

B rappresenta un insieme di insiemi, i cui elementi sono tutti quegli insiemi con più di due elementi, per es. l'insieme delle vocali appartiene a B , l'insieme delle consonanti appartiene a B , ma anche l'insieme delle 10 cifre arabiche appartiene a B . È , dunque, evidente che appartengono a B almeno tre elementi. Quindi, B è un insieme con più di due elementi e, pertanto, è elemento di sé stesso.

Finora sembra che possano esistere insiemi che sono elementi di sé stessi ed insiemi che non lo sono.

Ora, si giunge alla contraddizione.

Si definisca l'insieme $C=\{X : X \notin X\}$, cioè l'insieme di tutti gli insiemi che tra i loro elementi non hanno sé stessi.

Il problema posto da *Russell* è se C appartiene o meno a sé stesso. Se l'insieme C non fosse elemento di sé stesso, allora dovrebbe appartenere a C, quindi esserlo. Analogamente, se lo fosse, dovrebbe non esserlo.

La definizione di C, dunque, genera in ogni caso un'antinomia.

In sintesi, l'antinomia di *Russell* si può enunciare nel modo seguente: *l'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a sé stessi appartiene a sé stesso se e solo se non appartiene a sé stesso*.

In simboli:

se $C=\{X : X\notin X\}$, allora $(C\in C)\Leftrightarrow(C\notin C)$.

Paradosso del barbiere.

Il barbiere di un piccolo villaggio ha appeso un cartello nel suo negozio in cui afferma di radere *solo* quelli che non si radono da sé. Nessuno ci ha trovato mai niente di strano, finché un bel giorno suo figlio non gli pone una domanda fatale: "Ma tu ti puoi radere?".

Il padre risponde alla domanda con sufficienza: "Che domanda sciocca! Ma se mi rado due volte alla settimana!". Il figlio però lo interrompe: "Quindi non sei uno di quelli che non si radono da

sé?”. Il padre, che non ha ben capito, dice: “Io non sono uno di quelli che non …, perché io mi... sì, è vero”. “Per cui, secondo il tuo cartello, tu non puoi raderti!” osserva allora il figlio.
A questo punto il padre infuriatosi esclama: “Come sarebbe a dire, non posso...?”. Un cliente che si trova sotto il suo rasoio in quel momento osserva: “Ma è chiaro, sul tuo cartello c’è scritto che radi *solo* quelli che non si radono da sé, quindi non radi quelli che si radono da sé. Se, però, tu, caro il mio barbiere, ti radi da te, allora il barbiere, cioè tu, non può raderti!” e con la vittoria in pugno, il cliente si alza e se ne va, lasciando di stucco il barbiere.

Russell per risolvere il problema e rimuovere le antinomie cerca di limitare il principio di comprensione, inserendo una netta separazione tra insiemi e classi. Questa distinzione, però, non è sufficiente per superare tutti i dubbi sollevati in precedenza e solo in seguito, con un approccio completamente diverso, si riescono ad elaborare delle teorie innovative assiomatiche più rigorose, enunciando una lista di assiomi che definiscono gli insiemi e le operazioni che si possono effettuare su di essi.
La teoria che ha avuto maggiore seguito è la *teoria di Zermelo-Fraenkel*, formulata inizialmente da *Ernst Zermelo* e perfezionata in seguito da *Abraham Fraenkel*. Tale teoria, con le successive

estensioni, fornisce ad oggi la base teorica per la maggior parte delle costruzioni matematiche.

2.21 TEORIA ASSIOMATICA *ZFC*: CENNI

Si introduce, ora, una serie di assiomi che regolano la *teoria assiomatica ZFC degli insiemi*, cioè la teoria di *Zermelo-Fraenkel* (*ZF*), potenziata con l'Assioma di Scelta (*AC*, in inglese *Axiom of Choice*). Prima di elencare gli assiomi che caratterizzano tale teoria è doveroso definire un assioma e ricordare che la presente trattazione, sebbene semplificata, necessita di conoscenze propedeutiche relative ai concetti di relazioni e funzioni.

Definizione di assioma. Si definisce *assioma* una proposizione fondamentale che non necessita di dimostrazione perché vera in modo evidente.

Assioma 0 *(Assioma di esistenza):*

Esiste almeno un insieme.

In simboli: $\exists X$.

L'assioma di esistenza è di fondamentale importanza, in quanto garantisce che la teoria degli insiemi abbia almeno un oggetto di studio.

Assioma 1 *(Assioma di estensionalità):*
Considerati due insiemi qualunque, X e Y, essi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi.

In simboli: $\forall X, \forall Y, \ (X=Y) \Leftrightarrow (\forall Z, \ Z\in X \Leftrightarrow Z\in Y)$.

L'assioma di estensionalità fornisce la certezza che un insieme è individuato unicamente e univocamente dagli elementi che possiede e non dalle rappresentazioni caratteristiche che li contraddistinguono. In altri termini, è possibile esprimere uno stesso insieme anche per mezzo di caratteristiche differenti, purché tali proprietà caratteristiche individuino elementi identici e, quindi, lo stesso insieme.
Questo assioma mette in luce, inoltre, la mancanza d'ordine in un insieme, in quanto rende uguali due insiemi anche se gli elementi hanno un ordine di posizione differente.
Ancora, tale assioma permette di non ripetere gli elementi all'interno di un insieme. Infatti, due insiemi del tipo $\{a, a\}$ e

$\{a\}$ sono uguali perché hanno gli stessi elementi.

Altra conseguenza dell'assioma di estensionalità è che nella teoria *ZFC* non esistono atomi (*ur-elementi*), cioè non esistono oggetti matematici elementari che non siano insiemi. Infatti, ciascuno di questi atomi (in quanto privo di elementi) dovrebbe coincidere con l'insieme vuoto ed essere esso stesso un insieme.

- **Nota 1**

  I numeri di solito sono pensati come atomi e non come insiemi, invece, in *ZFC* si assume implicitamente che tutti gli oggetti siano insiemi, compresi i numeri, che possono essere codificati come particolari insiemi.

Assioma 2 *(Assioma di regolarità o di fondatezza o di fondazione):*

Ogni insieme non vuoto X *contiene almeno un elemento* Y *disgiunto da* X .

In simboli:

$$\forall X: \ X \neq \emptyset \ \Rightarrow \ \left(\exists Y: Y \in X\right) \wedge \left(\neg \exists Z: (Z \in X) \wedge (Z \in Y)\right).$$

- **Nota 2**

  Si noti come ci si riferisca alla disgiunzione tra un elemento ed un insieme, sottolineando che un insieme può essere elemento di altri insiemi e che gli elementi possono essere visti come insiemi.

L'assioma di regolarità implica che *nessun insieme è elemento di se stesso*.
L'essenza di tale assioma si può sintetizzare come segue: *ogni insieme è ben fondato*.
L'assioma di fondazione permette di trovare un modello molto semplice della teoria degli insiemi: a partire da un insieme vuoto si può ottenere qualsiasi insieme.
Ciononostante, questo assioma è molto discusso perché poco utile nella teoria *ZFC*, in quanto tutti i risultati ottenuti nelle teorie basate su quella degli insiemi valgono anche in assenza di regolarità. Altre teorie degli insiemi non standard, oltre ad omettere tale assioma, hanno addirittura postulato l'esistenza di insiemi che sono elementi di sé stessi.

Schema di Assiomi 3 *(Schema di assiomi di specificazione o di isolamento o di separazione o di comprensione):*
Dato un generico insieme X, esiste almeno un insieme Y tale che, dato un generico insieme Z, Z è un elemento di Y se e solo se Z è un elemento di X e per Z vale un predicato P.

In simboli: $\forall X, \exists Y: (\forall Z, Z \in Y) \Leftrightarrow (Z \in X \wedge P(Z))$.

- **Nota 3**

  Si noti che esiste un assioma di specificazione per ogni predicato P, quindi questo assioma rappresenta un elenco di infiniti assiomi, cioè è uno *schema di assiomi* e rende infinita la lista degli assiomi che si stanno trattando.

È opportuno comprendere meglio questo schema di assiomi.
Dato un insieme X e un predicato P, è possibile trovare un sottoinsieme Y di X, i cui elementi sono precisamente gli elementi di X che soddisfano la caratteristica P. Per l'assioma di estensionalità tale insieme risulta unico e può essere individuato mediante la rappresentazione per caratteristica.
A questo schema di specificazione e all'assioma di esistenza è dovuta la possibilità di introdurre il vuoto, infatti: $\exists X: X = X$ e il vuoto è $\emptyset = \{X: X \neq X\}$.

Assioma 4 *(Assioma della coppia):*
Dati due elementi X e Y, esiste almeno un insieme che li contiene entrambi.

In simboli: $\forall X, \forall Y, \ \exists Z: (X \in Z) \wedge (Y \in Z)$.

Usando l'assioma di estensionalità si nota, poi, che tale insieme Z è anche unico. Precisamente è l'insieme così definito: $Z=\{W: (W=X)\vee(W=Y)\}$.

Questo insieme è detto *coppia non ordinata* e si denota di solito con $Z=\{X,Y\}$. Una coppia non ordinata del tipo $\{X,X\}=\{X\}$ definisce l'insieme *singoletto* o *singleton*.

In base all'assioma della coppia è possibile definire anche la *coppia ordinata* (già introdotta in precedenza), mediante la definizione di *Kuratowski*, che qui si riprende per completezza del discorso: $(X,Y)=\{\{X\},\{X,Y\}\}$.

Assioma 5 *(Assioma dell'unione):*

Dato un generico insieme X, esiste almeno un insieme Y tale che, dato un generico elemento Z, Z è un elemento di Y se e solo se esiste un insieme W tale che Z è un elemento di W e W è un elemento di X.

In simboli:

$\forall X,\ \exists Y: \ (\forall Z, Z\in Y)\Leftrightarrow(\exists W: \ (Z\in W)\wedge(W\in X))$.

L'assioma dell'unione, in sintesi, afferma che, dato un insieme X, è possibile trovare almeno un insieme Y i cui elementi sono esattamente gli elementi degli elementi di X. Grazie all'assioma di estensionalità, questo insieme Y è unico, chiamato *unione di* X e denotato con $\cup X$. L'assioma dell'unione, congiunto all'assioma della coppia, implica che, per ogni coppia di insiemi, esiste un insieme che contiene esattamente gli elementi di entrambi. In quest'ottica si deduce che *l'unione di un insieme è un insieme.*

- **Nota 4**

  Si noti che nella teoria *ZFC* non esiste alcun assioma dell'intersezione e se l'insieme è vuoto non esiste la stessa intersezione. D'altra parte, se X è non vuoto, è possibile formare l'intersezione $\cap X$ mediante l'assioma di specificazione, cioè mediante caratteristica.

Schema di Assiomi 6 *(Schema di assiomi di rimpiazzamento):*
Se, dato un generico insieme X, esiste un unico insieme Y tale che una relazione P vale per X e Y, allora, dato un generico insieme A, esiste un insieme B tale che, dato un generico insieme C, C è un elemento di B se e solo se esiste un insieme D tale che D è un elemento di A e P vale per D e C.

In simboli:

$$\left(\forall X, \exists ! Y : P(X, Y)\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\forall A, \exists B : \left(\forall C, C \in B\right) \Leftrightarrow \left(\exists D : \left(D \in A\right) \wedge P(D, C)\right)\right).$$

- **Nota 5**

  Si noti che esiste un assioma di rimpiazzamento per ogni relazione P, quindi questo assioma rappresenta un elenco di infiniti assiomi, cioè è uno *schema di assiomi*.

È sufficiente dare uno sguardo anche superficiale a tale schema per capire che non si tratta di un assioma di facile comprensione.
È doveroso un cenno ad un'interpretazione intuitiva per meglio comprenderne il significato e ridurre lo sforzo mnemonico.
Prerequisiti necessari per la comprensione di questo assioma sono la definizione di relazione tra due insiemi, il concetto di dominio, di esistenza e di predicato funzionale mediante una relazione.
La prima parte dello schema introduce una relazione P tra i due insiemi X e Y in modo da definire un predicato funzionale F tale che $Y = F(X)$ se e solo se vale $P(X, Y)$. La seconda parte assicura, dato un insieme A, l'esistenza di un insieme B, nel quale ogni elemento C assume il valore del predicato funzionale F in qualche elemento D di A, cioè $C = F(D)$ con $D \in A$.

In termini semplicistici, lo schema di rimpiazzamento garantisce che *l'immagine di un insieme mediante un predicato funzionale è ancora un insieme*.
Usando l'assioma di estensionalità è possibile mostrare l'unicità di questo insieme B, che si definisce *immagine di* A *mediante* F e si denota con $F(A)$.

Assioma 7 *(Assioma dell'infinito):*
Esiste un insieme N_0 *che ha l'insieme vuoto tra i suoi elementi e tale che se* X *è un elemento di* N_0*, anche l'insieme formato dall'unione di* X *con il suo singleton* $\{X\}$ *è un elemento di* N_0.

In simboli: $\exists N_0 : (\emptyset \in N_0) \wedge ((\forall X : X \in N_0) \Rightarrow ((X \cup \{X\}) \in N_0))$.

Tale insieme N_0 è denominato *insieme induttivo*, in quanto, grazie ad una iterazione induttiva, si riesce a includere in esso tutti i numeri naturali con lo zero. Si verifichi quanto appena affermato.
Dato un insieme X, l'assioma della coppia rende lecita la costruzione del singleton di X e l'assioma dell'unione permette la seguente definizione.

Definizione di successore. Si dice *successore di* X l'unione di X e del suo singleton $\{X\}$.

Tale successore in base all'assioma dell'infinito è appartenente sempre a N_0.

Data la definizione dei successori si introduce, ora, la codifica insiemistica dei numeri naturali con lo zero.

In questa codifica, lo zero corrisponde all'insieme vuoto:

$0=\emptyset$;

1 è il successore di 0 : $1=0\cup\{0\}=\emptyset\cup\{0\}=\{0\}$;

2 è il successore di 1 : $2=1\cup\{1\}=\{0\}\cup\{1\}=\{0,1\}$;

3 è il successore di 2 : $3=2\cup\{2\}=\{0,1\}\cup\{2\}=\{0,1,2\}$;

$\vdots$

Conseguenza immediata di tale codifica è che *ogni numero naturale è uguale all'insieme costituito da tutti i numeri naturali precedenti*.

In simboli: $n=\{0,1,2,3,\ldots,n-1\}$.

L'assioma dell'infinito, quindi, assume l'esistenza di un insieme che raccoglie tutti i numeri naturali, incluso lo zero.

Un insieme siffatto potrebbe contenere anche altri elementi, oltre ai numeri naturali con lo zero, ma grazie allo schema di assiomi di specificazione è possibile applicare un particolare predicato caratteristico per rimuovere tutti gli elementi non utili allo scopo, lasciando unicamente i numeri naturali con lo zero e rendendo minimo tale insieme. Questo insieme risulta, poi, unico per l'assioma di estensionalità.

Assioma 8 *(Assioma della potenza):*
Dato un generico insieme X *, esiste un insieme* $P(X)$ *tale che, considerato un generico insieme* Y *,* Y *è un elemento di* $P(X)$ *se e solo se* Y *è un sottoinsieme di* X *.*

In simboli: $\forall X, \exists P(X)\colon\ (\forall Y, Y \in P(X)) \Leftrightarrow (Y \subseteq X)$.

Si ricordi che vale l'equivalenza:
$(Y \subseteq X) \Leftrightarrow (\forall Z, Z \in Y \Rightarrow Z \in X)$.
Per l'assioma di estensionalità questo insieme $P(X)$ è unico ed è denominato *insieme potenza di* X .
L'assioma può essere sintetizzato affermando che *ogni insieme è dotato di insieme potenza*.
L'assioma della potenza permette la definizione del prodotto cartesiano tra due insiemi:

$$\forall X, \forall Y, X \times Y = \{(A, B) : A \in X \wedge B \in Y\} .$$

Tale definizione risulta lecita in base alla seguente inclusione: $X \times Y \subseteq P\left(P\left(X \cup Y\right)\right)$. Da ciò si deduce che il prodotto cartesiano è un insieme.

Gli assiomi finora introdotti sono alla base della teoria *ZF*. Al fine di introdurre la più completa teoria *ZFC* è necessario aggiungere un ulteriore assioma.

Assioma 9 *(Assioma di scelta):*
Dato un insieme non vuoto di insiemi non vuoti esiste almeno una funzione che ad ogni insieme dell'insieme fa corrispondere un suo elemento.

In simboli: $\forall X : X \neq \emptyset , \exists f : \left(\forall Y , \left(Y \in X\right) \wedge \left(Y \neq \emptyset\right)\right) \rightarrow Z \in Y$.

Una funzione così definita rappresenta una *funzione di scelta* tra gli elementi di un insieme, al fine di costruire altri insiemi. Questo assioma risulta essenziale per la scelta tra infiniti elementi; viceversa, per la scelta tra un numero finito di elementi sono sufficienti i precedenti assiomi.

- **Esempio**

  Si introduce un esempio per meglio comprendere il significato di questo assioma. Sia *X* una biblioteca (non vuota) che contiene infiniti libri e sia *Y* un generico libro (non vuoto) di *X*. L'assioma di scelta garantisce l'esistenza di una funzione *f* che permette di associare ad ogni libro *Y* di *X* una sua pagina *Z* (di *Y*). In tal modo è possibile costruire un insieme nuovo con tutte le pagine *Z* che sono state scelte.

L'assioma di scelta può essere espresso anche in una forma equivalente mediante il seguente teorema.

Teorema *(del buon ordinamento)*

Considerato un generico insieme X*, esiste sempre un buon ordine per* X.

In simboli: $\forall X, \exists \Re$ $\left(\Re\right.$ è un buon ordine per $\left.X\right)$.

- **Nota 6**

  Si tralascia la dimostrazione del teorema del buon ordinamento, dal momento che esula dallo scopo del testo definire un buon ordine per un insieme. Il teorema del buon ordinamento non deve essere confuso con il *principio del buon ordinamento*, detto anche *del minimo intero naturale*, che, invece, afferma:

  Ogni insieme di numeri naturali non vuoto contiene un numero che è più piccolo di tutti gli altri.

Introdotti gli assiomi necessari per fondare la teoria degli insiemi, tutte le definizioni relative ad operazioni e tutti i teoremi della teoria intuitiva possono essere ricondotti ai suddetti assiomi. In tal modo si costruisce una teoria assiomatica sufficientemente non controversa, con la quale si eludono i problemi paradossali che la teoria ingenua non è, invece, in grado di risolvere e si stabiliscono le fondazioni che permettono di costruire, in modo rigoroso, tutte quelle discipline postulatorie basate sulla teoria degli insiemi.

INDICE ANALITICO

Analitic@Mente

Collana di Analisi Matematica

Centro Studi Medea